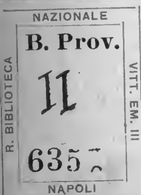

FONDO PROVINCIA




NAZIONALE
B. Prov.
II
635
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

MANUEL

DES

ANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

MANUEL

DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

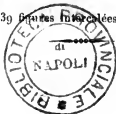
PAR EUGÈNE CATALAN,

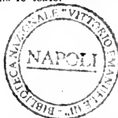
Ancien Élève de l'École Polytechnique, ex-Répétiteur de Géométrie descriptive à cette École, Docteur ès Sciences, Agrégé de l'Université, ex-Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée Saint-Louis, Membre de la Société Philomathique, Correspondant des Académies des Sciences de Toulouse, Lille, Liége, et de la Société d'Agriculture de la Marne.

TOME SECOND.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS, MÉCANIQUE.

Avec 139 figures intercalées dans le texte.





PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1858

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SECOND.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

Pages.

CHAPITRE Ier. — Des coordonnées et des lieux dans l'espace 1

Coordonnées rectilignes 1
Équations du point 2
Équations des surfaces et des lignes 2
Projections d'une ligne 4
Signes des coordonnées 5
Coordonnées polaires 6

CHAPITRE II. — Théorie de la ligne droite 7

Équations de la ligne droite 7
Problèmes sur la ligne droite 8

Exercices 12

CHAPITRE III. — Théorie du plan 13

Équation du plan 13
Problèmes sur le plan et la ligne droite 15

Exercices 27

CHAPITRE IV. — Transformation des coordonnées 29

Applications de la transformation des coordonnées 31

Exercices 34

Pages.

CHAPITRE V. — Du centre dans les surfaces du second ordre 35

Exercices 38

CHAPITRE VI. — Des plans diamétraux et des plans principaux 38

Équation générale des plans diamétraux 38
Des plans principaux 41

Exercices 43

CHAPITRE VII. — Réduction de l'équation générale du second degré 43

Disparition des rectangles 43
Réduction aux deux formes principales 44

Exercices 46

CHAPITRE VIII. — Discussion des surfaces à centre 47

Ellipsoïde 47
Hyperboloïde à une nappe 49
Hyperboloïde à deux nappes 50
Cônes du deuxième degré 51
Cylindre elliptique ou hyperbolique 52
Cône asymptotique d'un hyperboloïde 53

Exercices 54

CHAPITRE IX. — Discussion des surfaces dépourvues de centre 55

Paraboloïde elliptique 55
Paraboloïde hyperbolique 57
Cylindre parabolique 58
Résumé des deux derniers chapitres 59

Exercices 59

CHAPITRE X. — Génératrices rectilignes des surfaces du second ordre 60

Hyperboloïde à une nappe 60
Paraboloïde hyperbolique 65

Exercices 69

Pages.

CHAPITRE XI. — Discussion des équations numériques du second degré, à trois variables 70

Préliminaires 70
Premier cas : un centre unique 71
Deuxième cas : une droite lieu des centres 73
Troisième cas : un plan lieu des centres 73
Quatrième cas : aucun centre 73
Complément de la discussion des surfaces à centre unique ... 74
Recherche des génératrices rectilignes 77
Applications 83

Exercices 86

CHAPITRE XII. — Recherche des équations de quelques surfaces 87

Surfaces cylindriques 87
Surfaces coniques 88
Surfaces de révolution 90
Surfaces conoïdes 91

Exercices 92

CHAPITRE XIII. — Théories générales 93

De la tangente 93
Du plan tangent et de la normale 94
Des lignes considérées comme trajectoires 95
Du plan normal 95
Dérivée de l'arc 96
Du plan osculateur 97
Du cercle osculateur 99

Exercices 101



MÉCANIQUE.

Pages.

CHAPITRE Ier. — Introduction ... 104
Notions préliminaires ... 104
De la mesure du temps ... 105

CHAPITRE II. — Du mouvement d'un point ... 107
Mouvement uniforme ... 107
Mouvement varié ... 109

CHAPITRE III. — De la vitesse ... 110

Exercices ... 114

CHAPITRE IV. — Du mouvement uniformément varié ... 115
Chute des corps pesants ... 116

Exercices ... 117

CHAPITRE V. — De la composition des mouvements et des vitesses ... 118
Composition des mouvements ... 118
Composition des vitesses ... 123
Application de la théorie des coordonnées à la composition des vitesses ... 126
Des mouvements apparents ... 128

CHAPITRE VI. — De l'accélération ... 133
Mouvement rectiligne ... 133
Mouvement curviligne ... 136
Accélération tangentielle et accélération centripète ... 138

CHAPITRE VII. — Applications ... 140

Exercices ... 151

CHAPITRE VIII. — De l'inertie et des forces ... 152
Effets des forces ... 155
Forces égales. — Comparaison des forces aux poids ... 156
Égalité entre l'action et la réaction ... 157
Production du mouvement par les forces ... 158
Indépendance des effets produits par plusieurs forces ... 160
Comparaison des forces constantes ... 164
Relations entre les forces, les accélérations et les masses ... 165

Pages.

CHAPITRE IX. — Théorie de la pesanteur.............. 168

Définitions.. 168
Phénomènes produits par la pesanteur.................... 169
Machine d'Atwood.. 171
Appareil à indications continues........................ 174
Problèmes sur le mouvement des corps pesants............ 175

CHAPITRE X. — Composition et équilibre des forces appliquées à un même point matériel...................... 182

Parallélogramme des forces............ 182
Conditions de l'équilibre d'un point matériel... 186

CHAPITRE XI. — Du travail et de la force vive........ 189

Préliminaires... 189
Définition du travail.................................... 190
Évaluation du travail total.............................. 192
Travail de la résultante de plusieurs forces...... 194
Unités de travail. — Effort moyen......... 195
Relation entre le travail et la force vive.................... 197
Principe des forces vives................................ 199
Surfaces de niveau... 201
Réaction des surfaces ou des lignes......................... 202

CHAPITRE XII. — Applications......................... 204

CHAPITRE XIII. — Composition des forces concourantes et des forces parallèles............................... 218

De la constitution des solides.............................. 218
Forces concourantes..................................... 219
Composition des forces parallèles.......................... 222

Exercices.. 225

CHAPITRE XIV. — Théorie des moments.............. 228

Définitions... 228
Forces concourantes..................................... 228
Forces parallèles.. 230
Composition et équilibre de forces parallèles............... 232

CHAPITRE XV. — Des centres de gravité.............. 234

Préliminaires.. 234
Détermination des centres de gravité. 235
Problèmes sur les centres de gravité........................ 239

Exercices.. 244

Pages

CHAPITRE XVI. — Composition et équilibre de forces quelconques 246
Équations de l'équilibre 248
Cas où les forces ont une résultante unique 252
Exercices 253

CHAPITRE XVII. — Généralités sur les machines 254
Définition des machines 254
Du mouvement uniforme des machines 256
Principe de la transmission du travail 257
Impossibilité du mouvement perpétuel 258
Rendement d'une machine 259
Du frottement 259
Expériences de Coulomb 261
Lois du frottement 263

CHAPITRE XVIII. — Équilibre et travail des forces appliquées au levier 265
De la balance 267

CHAPITRE XIX. — Équilibre et mouvement d'un corps reposant sur un plan 269
Conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan 269
Du plan incliné 272
Stabilité des corps pesants 278
Exercices 279

CHAPITRE XX. — Équilibre et travail des forces appliquées au treuil ou à la poulie 283
Du treuil 283
Équilibre d'un cordon 285
De la poulie 287
Des moufles 291

APPENDICE.

Formules approximatives de quadrature 293

MANUEL

DES

CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

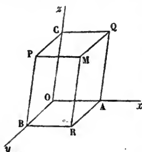
GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS.

CHAPITRE Ier.

DES COORDONNÉES ET DES LIEUX DANS L'ESPACE.

Coordonnées rectilignes.

1. En généralisant les notions exposées dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (51), on voit que les lieux géométriques les plus simples, propres à déterminer la position d'un point M de l'espace, sont trois plans ARQM, BPRM, CQPM, respectivement parallèles à trois plans fixes yOz, zOx, xOy formant un angle trièdre. En effet, si l'on donne les distances a, b, c du point inconnu aux trois plans fixes (la distance à chacun d'eux étant comptée parallèlement à l'intersection des deux autres), il suffira de prendre $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, et de mener ARQ, BPR, CQP : ces trois plans constituent, avec les trois plans fixes, un parallélipipède dans lequel le sommet M est le point cherché.



2. Les distances $OA = MP$, $OB = MQ$, $OC = MR$, ou plutôt les quantités a, b, c qui les représentent, sont *les coordonnées recti-*

lignes du point M. Les trois arêtes, les trois faces et le sommet de l'angle trièdre O portent les noms d'*axes*, de *plans* et d'*origine des coordonnées*. Quand l'angle trièdre O est trirectangle, les coordonnées sont dites *rectangulaires*.

3. *Remarque.* — Au lieu de la construction précédente, on peut, pour plus de simplicité, employer la ligne brisée OARM, dans laquelle $OA = a$, $AR = b$, $RM = c$.

Équations du point.

4. Si l'on convient de représenter généralement par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque, le point particulier M sera défini par les équations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Ici, comme dans la Géométrie à deux dimensions, on doit remarquer que chacune de ces équations représente l'un des lieux géométriques dont l'intersection est le point M. Par exemple, $x = a$ caractérise le plan ARQ, etc. En particulier, les plans coordonnés yOz, zOx, xOy sont représentés, respectivement, par

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

et ces équations, prises *simultanément*, représentent l'origine.

5. Remarques. — I. *Un point et chacune de ses projections ont toujours deux coordonnées communes.*

II. *Deux projections d'un même point ont toujours une coordonnée commune.*

En effet, les points M, P, Q, R ont pour équations, respectivement :

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c; \quad (M)$$
$$x = 0, \quad y = b, \quad z = c; \quad (P)$$
$$x = a, \quad y = 0, \quad z = c; \quad (Q)$$
$$x = a, \quad y = b, \quad z = 0. \quad (R)$$

Équations des surfaces et des lignes.

6. Théorème I. — *Toute équation qui renferme une, deux ou trois coordonnées représente, en général, une surface.*

1°. Considérons, pour fixer les idées, une équation

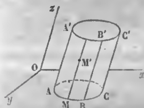
$$f(z) = 0 \quad (1)$$

renfermant seulement l'ordonnée z. Soient $c, c', c'', \ldots$, les racines réelles de cette équation. Si l'on construit les plans représentés par $z=c$, $z=c'$, $z=c'', \ldots$, on aura *le lieu* de l'équation (1). Par conséquent, *toute équation renfermant une seule coordonnée représente, en général, un système de plans parallèles aux axes des coordonnées qui n'entrent pas dans l'équation.*

2°. Pour interpréter une équation entre deux coordonnées,

$$f(x,y)=0, \quad (2)$$

construisons, dans le plan xOy, la courbe ABC dont tous les points vérifient l'équation; par l'un d'eux, pris arbitrairement, menons MM′ parallèle à Oz : tous les points de cette droite MM′ vérifieront encore l'équation. En effet, les valeurs de x et de y sont les mêmes pour le point M′ et pour sa projection M (5).



Il résulte de là que le lieu de l'équation proposée est la surface cylindrique ABCA′B′C′ engendrée par la droite MM′. Ainsi, *toute équation entre deux coordonnées représente, en général, une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe de la coordonnée qui n'entre pas dans l'équation.*

3°. Soit $\quad f(x,y,z)=0 \quad (3)$

une équation entre les trois variables x, y, z. Si nous donnons à z une valeur particulière

$$z=\gamma, \quad (4)$$

nous obtenons $\quad f(x,y,\gamma)=0; \quad (5)$

et les équations (4) et (5), prises simultanément, représentent un lieu dont tous les points vérifient l'équation (3). D'après ce qui précède, ce lieu est l'intersection C d'un plan parallèle au *plan des zy* (*) et d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles à l'*axe des z* (*). Pour une autre valeur γ' attribuée à z, nous obtiendrons une

(*) Pour abréger, nous employons ces dénominations, qui sont consacrées par l'usage.

courbe C'; et ainsi de suite. Par conséquent, l'équation (3) appartient au lieu géométrique des lignes C, C', C";... : cette équation représente donc une certaine surface.

7. Théorème II. — 1° *Le système de deux équations représente, en général, une ligne; 2° le système de trois équations représente, en général, un ou plusieurs points.*

Ces propositions, déjà vérifiées dans différents cas particuliers, sont des conséquences très-simples du premier théorème.

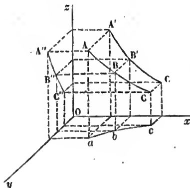
8. Les propositions précédentes sont, comme celles qui leur correspondent dans la Géométrie plane, sujettes à diverses exceptions. Ainsi : 1° *une équation peut représenter un point ou une ligne;* 2° *une équation peut ne rien représenter;* 3° *deux équations peuvent représenter un point ou ne rien représenter, etc.* Par exemple, l'équation $x^2+y^2+z^2=0$ représente l'origine; l'équation $(x^2+y^2-1)^2+z^2=0$ représente une circonférence située dans le plan des xy, et dont le centre est à l'origine, etc.

Projections d'une ligne.

9. Au lieu de déterminer une ligne ABC par deux surfaces quelconques dont elle soit l'intersection, on peut, pour plus de simplicité, se donner les cylindres qui la projettent sur deux des plans coordonnés, sur les plans des xz et des yz, par exemple. Les équations de ces *cylindres projetants* sont de la forme

$$f_1(x,z)=0, \quad (1) \qquad f_2(y,z)=0; \quad (2)$$

et il est clair, d'après le Théorème I (2°), que chacune d'elles appartient, soit à la projection A'B'C', soit à la projection A"B"C".



10. Problème. — *Connaissant les équations de deux des projections d'une ligne, trouver l'équation de la troisième projection.*

Il suffit, pour résoudre cette question, d'éliminer la coordonnée comme aux équations données.

En effet, si l'on élimine z entre

les équations (1) et (2), on obtiendra une équation

$$F(x, y) = 0 \quad (3)$$

à laquelle satisferont *tous les systèmes* de valeurs de x et de y qui vérifient les proposées. Cette équation (3) représente donc une surface cylindrique passant par la courbe ABC : elle appartient donc à la projection *abc* de cette courbe.

11. Plus généralement, si l'on combine, d'une manière convenable, les équations de deux surfaces, l'équation résultante sera celle d'une troisième surface passant par la courbe d'intersection des deux premières. Par exemple, en ajoutant membre à membre les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad (A) \qquad xy + zx + yz = 0, \quad (B)$$

après avoir multiplié les deux membres de la seconde par 2, on obtient

$$(x + y + z)^2 - 1 = 0; \quad (C)$$

et cette nouvelle équation appartient à une surface qui passe par la courbe d'intersection des deux autres (*).

12. *Remarque.* — Si au lieu d'éliminer z entre les équations (1) et (2), on donnait à cette coordonnée différentes valeurs $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, on obtiendrait les coordonnées $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'', \ldots$, d'un certain nombre de points de la projection *abc*. Ce procédé est d'accord avec les constructions géométriques, dont il est en quelque sorte la traduction.

Signes des coordonnées.

13. Les conventions adoptées pour les figures planes (*D. D.* (**), 59) doivent évidemment être étendues aux figures situées dans l'espace : si l'on n'affectait pas de certains signes les coordonnées d'un point, les équations

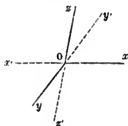
$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

ne pourraient servir à distinguer les *huit points* dont les distances

(*) Les équations (A), (B), (C) représentant, respectivement, *une sphère, un cône* et *deux plans parallèles*, il résulte, de ce calcul, que la surface (B) est un *cône de révolution*.

(**) Cette abréviation signifie *Géométrie analytique à deux dimensions*.

aux plans coordonnés sont, en valeurs absolues, a, b, c. Ordinairement, on suppose que l'angle trièdre $Oxyz$, disposé comme on le voit sur la figure, appartient aux points dont les coordonnées sont positives. D'après cette hypothèse:



L'ordonnée x est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *à droite* ou *à gauche* du plan yOz;

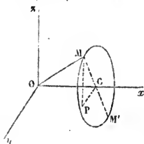
L'ordonnée y est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *en avant* ou *en arrière* du plan zOx;

L'ordonnée z est *positive* ou *négative*, suivant que le point est *au-dessus* ou *au-dessous* du plan zOy.

Coordonnées polaires.

14. Les principes exposés dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (Chap. IV) sont applicables aux trois dimensions de l'espace; ainsi, *il y a autant de systèmes de coordonnées que de moyens de déterminer un point par l'intersection de trois lieux géométriques.*

Par exemple, un point donné M pouvant être regardé comme l'intersection de la *sphère* ayant pour centre le *pôle* O, du *cône* engendré par OM tournant autour de l'*axe polaire* Ox, et du *demi-plan* MOx (*); il s'ensuit que l'on peut prendre pour *coordonnées polaires* du point M : 1° le *rayon vecteur* $OM = a$; 2° l'*amplitude* $MOx = b$; 3° l'*azimut* $MCP = c$, c'est-à-dire l'angle formé par le *demi-plan* MOx avec le demi-plan xOy. Si l'on



(*) Si le plan déterminé par OM et Ox était prolongé au delà de cette dernière droite, il couperait une seconde fois la circonférence C, intersection du cône et de la sphère, et il y aurait ambiguïté dans la position du point. Pour la même raison, on ne considère pas la seconde nappe du cône.

appelle u, θ, ψ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, le point M sera déterminé par les trois équations

$$u = a, \quad (1) \qquad \theta = b, \quad (2) \qquad \psi = c. \quad (3)$$

15. *Remarques.* — I. Les équations (1), (2), (3) représentent la sphère, le cône et le demi-plan dont il vient d'être question.

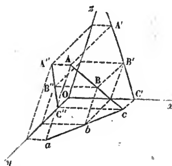
II. Ces équations détermineront, sans ambiguïté, tous les points de l'espace, si l'on fait varier u, θ et ψ, respectivement, de 0 à $+\infty$, de 0 à π, et de 0 à 2π.

CHAPITRE II.

THÉORIE DE LA LIGNE DROITE.

Équations de la ligne droite.

16. Une droite quelconque AB, *non parallèle au plan des xy*, peut être représentée par les équations de ses projections A′B′, A″B″ sur les autres plans coordonnés. Les *équations de la ligne droite* sont donc, en général,



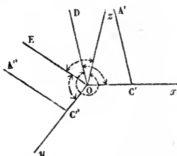
$$x = az + p, \quad (1)$$
$$y = bz + q. \quad (2)$$

17. *Signification des constantes* a, b, p, q. — 1°. Dans l'équation (1), p représente l'*ordonnée à l'origine* de la projection A′C′, c'est-à-dire la distance OC′. De même, $q = \text{OC}''$.

2°. On peut dire encore que *les constantes* p, q *sont les coordonnées du point* c *où la droite* AB *perce le plan des* xy. Cette interprétation, évidente par la figure, résulte aussi de ce que $z = 0$ donne $x = p$, $y = q$.

3°. Relativement aux *coefficients angulaires* a, b, il importe d'ob-

server que si l'on mène, dans le plan zx, OD parallèle à la projection C'A', on aura (*D. D.*, 101)



$$a = \frac{\sin zOD}{\sin xOD},$$

les angles étant comptés comme on le voit sur la figure.

De même, OE parallèle à C''A'' donne

$$b = \frac{\sin zOE}{\sin yOE}.$$

18. *Équations d'une droite parallèle au plan des xy.* — Une pareille droite est l'intersection d'un plan parallèle à l'axe des z et d'un plan parallèle aux xy. Ses équations sont donc, en général,

$$y = ax + b, \quad z = c.$$

Problèmes sur la ligne droite.

19. PROBLÈME I. — *Trouver les équations d'une droite passant par un point donné.*

Les projections de la droite doivent passer par les projections du point (x', y', z'). Par conséquent, les équations cherchées sont (*D. D.*, 106) :

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

20. PROBLÈME II. — *Trouver les équations d'une droite passant par deux points donnés.*

Les projections de la droite sont représentées par (*D. D.*, 108)

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'} z - z'.$$

Ce sont donc là les équations demandées. On peut les écrire ainsi :

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}.$$

21. PROBLÈME III. — *Trouver les équations d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.*

Rappelons-nous que *deux droites sont parallèles si leurs pro-*

jections, faites sur deux plans qui se coupent, sont respectivement parallèles (*).

Cela posé, si $x = az + p$, $y = bz + q$ sont les équations de la droite donnée, la droite cherchée sera représentée par

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

22. Problème IV. — *Trouver le point de rencontre de deux droites données.*

Soient
$$\left.\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned}\right\} \text{(A)} \qquad \left.\begin{aligned} x &= a'z + p', \\ y &= b'z + q', \end{aligned}\right\} \text{(A')}$$

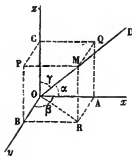
les équations des deux droites (A), (A′). Si ces lignes se coupent, les coordonnées de leurs points communs vérifieront les *quatre* équations précédentes. Ces équations renfermant *trois* inconnues seulement, il doit exister, entre les coefficients a, b, p,..., une *équation de condition*, que l'on obtient en éliminant x, y, z. Cette équation est

$$\frac{p - p'}{a - a'} = \frac{q - q'}{b - b'}.$$

Quand elle a lieu, *les droites* (A), (A′) *se coupent* en un point dont les coordonnées sont

$$z = -\frac{p - p'}{a - a'} = -\frac{q - q'}{b - b'}, \quad x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}.$$

23. Problème V. — *Trouver les angles que fait une droite avec les axes* (**).



Par l'origine, menons une parallèle OD à la droite donnée; prenons, sur cette parallèle, OM égale à l'unité de longueur, et achevons le *parallélipipède rectangle* OAR...M.

Les arêtes OA, OB, OC de ce polyèdre sont les coordonnées x, y, z du sommet M et, en même temps, les *projections orthogonales* de OM. Par conséquent,

$$\cos\alpha = x, \quad \cos\beta = y, \quad \cos\gamma = z.$$

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, page 12.

(**) Dans ce problème, et dans tous ceux que nous nous proposerons

D'un autre côté, les deux triangles *rectangles* ORM, OAR donnent

$$\overline{OA}^2 + \overline{AR}^2 + \overline{MR}^2 = \overline{OM}^2,$$

ou

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (A)$$

Enfin, les équations de OD étant

$$x = az, \quad (3) \qquad y = bz, \quad (4)$$

l'élimination de x, y, z donne

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\beta &= \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}, \\ \cos\alpha &= \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}}. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

24. *Remarques.* — I. A cause de $\cos\beta = b\cos\gamma$, $\cos\alpha = a\cos\gamma$, le radical doit être pris avec le même signe dans les formules (B). On obtient donc deux systèmes de valeurs pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Ce résultat pouvait être prévu; car les *deux directions* opposées OD, OD' font, avec les *parties positives* des axes, six angles supplémentaires deux à deux.

II. Quand on prend positivement le radical, on obtient les cosinus des angles que forme, avec les *parties positives* des axes, *le segment* OD de la parallèle DOD', *situé au-dessus* du plan des xy. En effet, l'angle DOZ étant aigu, son cosinus est positif.

III. La relation (A) s'énonce ainsi : *La somme des carrés des cosinus des angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires, est égale à l'unité* (*).

25. Problème VI. — *Trouver l'angle de deux droites.*

Par l'origine, menons les parallèles OD, OD' aux deux droites données, et soient

$$\left.\begin{aligned} x &= az, \\ y &= bz, \end{aligned}\right\} \ (OD) \qquad \left.\begin{aligned} x &= a'z, \\ y &= b'z, \end{aligned}\right\} \ (OD')$$

---

sur les *angles* ou sur les *distances,* les axes seront, pour plus de simplicité, supposés rectangulaires.

(*) Elle donne $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$

les équations de ces parallèles. Les formules (B) donneront les angles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ que forment, avec Ox, Oy, Oz, les segments OD, OD'. Cela posé, prenons la distance OM égale à l'unité de longueur, et projetons OM sur OD'. Nous aurons, en faisant attention que OM ferme le contour polygonal OARM (*D. D.*, 82), et en représentant par θ l'angle cherché,

$$\cos\theta = \text{OA}\cos\alpha' + \text{AR}\cos\beta' + \text{RM}\cos\gamma',$$

ou $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'; \quad (C)$$

par suite, $$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + 1}{\pm\sqrt{(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1)}}. \quad (D)$$

26. *Remarques.* — I. Les segments OD, OD', situés au-dessus du plan des xy, et leurs prolongements OE, OE', forment quatre angles égaux deux à deux et supplémentaires deux à deux : c'est pourquoi $\cos\theta$ a deux valeurs égales et de signes contraires. Pour obtenir, sans ambiguïté, l'angle DOD', on devra prendre le radical positivement.

II. La formule (C) exprime que : *Le cosinus de l'angle de deux droites est égal à la somme des produits deux à deux des cosinus des angles formés par ces droites avec trois axes rectangulaires.*

III. En combinant les relations (C) et (A), on obtient cette formule remarquable :

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\theta = &(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2\\ &+(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2\\ &+(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2.\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

27. Problème VII. — *Exprimer que deux droites sont perpendiculaires.*

En supposant $\cos\theta = 0$ dans les formules (C) ou (D), on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0, \quad (F)$$

$$aa' + bb' + 1 = 0. \quad (G)$$

28. *Remarques.* — I. La relation (G) est moins générale que

la relation (F) : en effet, elle suppose que les deux droites données rencontrent le plan des xy (16).

II. Pour *exprimer que deux droites sont parallèles*, il suffit de faire $\sin\theta = 0$ dans l'équation (E). On obtient ainsi

$$\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha' = 0, \quad \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta' = 0,$$
$$\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma' = 0,$$

ou, en supposant tous les cosinus différents de zéro, et ayant égard à la relation (A):

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \pm 1.$$

Les conditions cherchées sont donc, ainsi que l'on devait s'y attendre,

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha', \quad \cos\beta = \pm\cos\beta', \quad \cos\gamma = \pm\cos\gamma'.$$

EXERCICES.

I. Quelle est la relation qui existe entre les angles λ, μ, ν déterminés par trois axes de coordonnées, et les angles α, β, γ formés, avec ces axes, par une droite quelconque?

Réponse :

$$\sin^2\alpha\sin^2\lambda + 2\cos\lambda\cos\beta\cos\gamma - 2\cos\mu\cos\nu\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ \sin^2\beta\sin^2\mu + 2\cos\mu\cos\gamma\cos\alpha - 2\cos\nu\cos\lambda\cos\gamma\cos\alpha$$
$$+ \sin^2\gamma\sin^2\nu + 2\cos\nu\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\alpha\cos\beta$$
$$+ 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - 2 = 0 \quad \text{(tome I}^{\text{er}}\text{, p. 292).}$$

II. Les équations de la droite étant

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

trouver les angles α, β, γ.

Résultat : En posant

$$l = a + b\cos\nu + c\cos\mu,$$
$$m = b + c\cos\lambda + a\cos\nu,$$
$$n = c + a\cos\mu + b\cos\lambda,$$
$$A = l^2\sin^2\lambda - 2mn(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu),$$
$$B = m^2\sin^2\mu - 2nl\,(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda),$$
$$C = n^2\sin^2\nu - 2lm\,(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu),$$

$$D = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

$$t^2 = \frac{D}{A+B+C},$$

on a $\cos\alpha = lt, \quad \cos\beta = mt, \quad \cos\gamma = nt.$

III. Trouver l'angle θ de deux droites faisant, avec trois axes obliques, des angles α, β, γ, α', β', γ'.

Résultat : En posant

$$L = \cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda - (\cos\beta\cos\gamma' + \cos\gamma\cos\beta')(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu),$$
$$M = \cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu - (\cos\gamma\cos\alpha' + \cos\alpha\cos\gamma')(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda),$$
$$N = \cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu - (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha')(\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu),$$

on trouve $\cos\theta = \dfrac{L+M+N}{D}.$

CHAPITRE III.

THÉORIE DU PLAN.

Équation du plan.

29. Pour trouver l'équation d'un plan quelconque, nous regarderons cette surface comme *le lieu des positions d'une droite mobile* G, *assujettie à s'appuyer sur une droite donnée* D, *en restant parallèle à une direction donnée.*

Soient $x = az + p$, (1) $y = bz + q$ (2)

les équations de la droite D, à laquelle on donne le nom de *directrice ;* soient

$$x = a'z, \quad y = b'z$$

les équations de la ligne à laquelle la *génératrice* G doit rester parallèle : cette génératrice sera représentée par

$$x = a'z + \alpha, \quad (3) \qquad y = b'z + \beta; \quad (4)$$

et, pour qu'elle rencontre la directrice, il faudra (22) que les *paramètres* α, β satisfassent à la relation

$$\frac{\alpha - p}{a' - a} = \frac{\beta - q}{b' - b}. \quad (5)$$

Cela posé, si l'on donnait à α diverses valeurs particulières, et qu'on tirât, de l'équation (5), les valeurs correspondantes de β, les équations (3) et (4) représenteraient les positions de la génératrice, correspondant à ces valeurs arbitraires de α. Par conséquent, pour trouver *l'équation du lieu de la génératrice*, on doit éliminer, entre les équations (3), (4), (5), les deux paramètres α, β qui particularisent cette ligne (*). On obtient ainsi

$$\frac{x - a'z - p}{a' - a} = \frac{y - b'z - q}{b' - b}. \quad (6)$$

Cette équation ayant la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (7)$$

il s'ensuit que *tout plan peut être représenté par une équation du premier degré, entre trois coordonnées rectilignes.*

30. Réciproquement, *toute équation de la forme*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

représente un plan.

En effet, si l'on combine l'équation (7) avec les équations d'une droite quelconque :

$$x = az + p, \quad (1) \qquad y = bz + q, \quad (2)$$

on obtient, en général, un seul système de valeurs pour x, y, z (**).

(*) Si cette conclusion ne lui paraît pas suffisamment évidente, le lecteur pourra développer ainsi la démonstration : L'équation (6), étant déduite des équations (3), (4), (5), est vérifiée par *tous les systèmes* de valeurs de x, y, z qui satisfont à ces équations. Autrement dit, la surface représentée par l'équation (6) contient un point *quelconque* d'une position *quelconque* de la génératrice; donc cette équation (6) est celle qu'il s'agissait d'obtenir.

(**) Si les équations (1), (2), (3) sont incompatibles, la droite ne rencontre pas le plan; si elles sont indéterminées, la droite est située dans le plan.

Par conséquent, *la surface représentée par l'équation* (7) *ne peut être rencontrée en plus d'un point par une droite :* cette surface est donc un plan.

31. *Remarque.* — Lorsque, dans l'équation (7), les coefficients A, B, C, D sont tous différents de zéro, le plan est *oblique aux trois axes*, et *il ne passe pas par l'origine*. Au contraire, si quelqu'un des coefficients est nul, le plan prend une position particulière. Par exemple, l'équation $Ax + By + Cz = 0$ représente *un plan passant par l'origine*. De même, $Ax + By + D = 0$ est l'équation *d'un plan parallèle à l'axe des z*, etc.

32. *Autre forme de l'équation du plan.* — En opérant comme nous l'avons fait pour la ligne droite, pour l'ellipse, etc. (*D. D.*, **102**, **213**), on peut remplacer l'équation (7) par cette autre équation très-symétrique :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (8)$$

dans laquelle a, b, c représentent *les distances de l'origine aux points d'intersection des axes avec le plan :* évidemment ces distances ne doivent pas être nulles.

Problèmes sur le plan et la ligne droite.

33. Problème I. — *Trouver l'équation d'un plan passant par trois points donnés.*

Soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les coordonnées de ces points; soit

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

l'équation cherchée. Les coefficients A, B, C, D doivent satisfaire aux relations

$$\left.\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Si l'on prend pour inconnues $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, on déduit, des trois dernières équations,

$$\frac{A}{D} = \frac{L}{\Delta}, \quad \frac{B}{D} = \frac{M}{\Delta}, \quad \frac{C}{D} = \frac{N}{\Delta}, \quad (3)$$

en posant (*Alg.*, 14),

$$\left.\begin{array}{l}\Delta = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x''',\\ L = -y''z''' + z''y''' - z'y''' + y'z''' - y'z'' + z'y'',\\ M = -x'z''' + x'z'' - z'x'' + x''z''' - z''x''' + z'x''',\\ N = -x'y'' + x'y''' - x''y''' + y'x'' - y'x''' + y''x'''.\end{array}\right\} \quad (4)$$

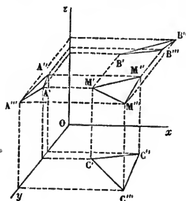
D'ailleurs, on satisfait aux équations (4) en prenant

$$A = L,\quad B = M,\quad C = N,\quad D = \Delta;$$

donc l'équation (1) peut être remplacée par

$$Lx + My + Nz + \Delta = 0. \quad (5)$$

34. *Interprétation géométrique des résultats précédents.* — Les coordonnées étant supposées rectangulaires, soient $A'A''A'''$, $B'B''B'''$, $C'C''C'''$ les projections du triangle ayant pour sommets les points donnés M', M'', M'''. Représentons par a, b, c les aires de ces trois projections, et par V la somme des volumes des trois *prismes tronqués*



$$M'M''M'''A'A''A''', M'M''M'''B'B''B''',$$
$$M'M''M'''C'C''C'''.$$

Nous aurons

$$L = \pm 2a,\quad M = \pm 2b,\quad N = \pm 2c,\quad \Delta = \mp 2V.$$

En effet, les trois premières valeurs résultent immédiatement de la formule de *Stainville*, qui donne l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets; et, pour obtenir la dernière, il suffit d'ajouter membre à membre les équations (2).

35. Problème II. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné.*

Cherchons d'abord les *conditions du parallélisme de deux plans donnés.* Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0 \quad (2)$$

les équations de ces plans. Pour qu'ils soient parallèles, *il faut et il suffit que leurs traces, sur deux des plans coordonnés, soient respectivement parallèles.* Posons donc, dans les équations (1) et (2), successivement $z = 0$, $x = 0$; nous obtiendrons les *deux* conditions cherchées :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \quad (3)$$

conséquemment, pour que *deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients des variables, dans les équations de ces plans, soient proportionnels* (*).

En revenant au problème proposé, supposons que l'équation (1) représente le plan donné, et que le plan inconnu soit représenté par l'équation (2). Comme on satisfait aux relations (3) en prenant

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C,$$

nous pouvons d'abord remplacer l'équation (2) par celle-ci :

$$Ax + By + Cz + D'' = 0. \quad (4)$$

D'un autre côté, le point donné ayant pour coordonnées x', y', z', le coefficient D″ sera déterminé par la condition

$$Ax' + By' + Cz' + D'' = 0.$$

L'équation demandée est donc

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

36. **Problème III.** — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné et par une droite donnée.*

Soient x', y', z' les coordonnées du point; soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations de la droite.

Si on les ajoute membre à membre, après avoir multiplié l'une d'elles par un facteur λ, on obtient l'équation

$$x - az - p + \lambda(b - bz - q) = 0,$$

(*) Cette condition subsiste quand les plans sont parallèles à l'un des axes. On l'obtient d'ailleurs, sans aucun calcul, en faisant attention que *les deux plans n'ont aucun point commun, si leurs équations sont incompatibles.*

qui représente *tous les plans passant par la droite donnée :* cette proposition résulte d'un raisonnement que nous avons souvent employé. Si l'on veut considérer, parmi ces plans, celui qui passe par le point donné, on devra déterminer le *paramètre* λ par la condition

$$x'-az'-p+\lambda(y'-bz'+q)=0.$$

L'équation cherchée est donc

$$\frac{x-az-p}{x'-az'-p}=\frac{y-bz-q}{y'-bz'-q}.$$

37. Problème IV. — *Trouver l'équation d'un plan passant par un point donné* (x', y', z') *et par l'intersection de deux plans donnés,* ayant pour équations

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1) \qquad A'x+B'y+C'z+D'=0. \quad (2)$$

En opérant comme dans le problème précédent, on trouve

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{Ax'+By'+Cz'+D}=\frac{A'x+B'y+C'z+D'}{A'x'+B'y'+C'z'+D'}.$$

38. Problème V. — *Trouver les projections de l'intersection de deux plans.*

Entre les équations (1), (2) du numéro précédent, dont l'ensemble représente l'intersection (7), éliminons une des coordonnées : l'équation résultante, représentant le plan qui projette l'intersection sur le plan des deux autres coordonnées, sera l'une des équations cherchées.

Par exemple, la projection de l'intersection des deux plans, sur le plan des xz, est représentée par l'équation

$$(AB'-BA')x+(CB'-BC')z+DB'-BD'=0,$$

jointe à

$$y=0.$$

39. Problème VI. — *Trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan donnés.*

Si, entre l'équation du plan,

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

et les équations de la droite,

$$x=az+p, \quad (2) \qquad y=bz+q, \quad (3)$$

on élimine x et y, on trouve

$$(Aa+Bb+C)z+Ap+Bq+D=0; \quad (4)$$

d'où, en supposant $Aa+Bb+C$ différent de zéro,

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}:$$

telle est l'ordonnée du point cherché; etc. (30).

40. *Conditions exprimant qu'une droite est parallèle à un plan.* — Si l'équation (4) se réduit à la forme $m=0$, les équations (1), (2), (3) sont incompatibles : les conditions dont il s'agit sont donc

$$Aa+Bb+C=0, \quad Ap+Bq+D \gtrless 0.$$

41. *Conditions exprimant qu'une droite est dans un plan.* — La droite sera dans le plan, si l'équation (4) est identique, c'est-à-dire si l'on a

$$Aa+Bb+C=0, \quad Ap+Bq+D=0.$$

42. Problème VII. — *Exprimer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.*

Soient, comme précédemment,

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

$$x=az+p, \quad (2) \quad y=bz+q \quad (3)$$

les équations du plan et de la droite, les axes coordonnés étant, pour plus de simplicité, supposés rectangulaires (*).

Pour que la droite soit perpendiculaire au plan, il faut et il suffit que les projections de la droite, sur deux des plans coordonnés, soient respectivement perpendiculaires aux traces du plan (**). Par suite, les conditions demandées sont (*D. D.*, 112)

$$-a\frac{C}{A}+1=0, \quad -b\frac{C}{B}+1=0,$$

ou

$$a=\frac{A}{C}, \quad b=\frac{B}{C}.$$

(*) *Voyez* la note du n° 25.

(**) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, Ire partie, page 12.

43. *Remarques.* — I. Le plan passant par un point (x', y', z'), et perpendiculaire à la droite représentée par

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

a pour équation

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \text{ (*)}.$$

II. La droite passant par un point (x', y', z'), et perpendiculaire au plan représenté par

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

a pour équations $\dfrac{x - x'}{A} = \dfrac{y - y'}{B} = \dfrac{z - z'}{C}$.

44. Problème VIII. — *Déterminer l'angle de deux plans* P, P'.

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations de ces plans. Par l'origine, menons deux droites D, D', respectivement perpendiculaires à P, P' : l'angle de ces droites est égal à l'angle cherché, ou il en est le supplément. D'ailleurs, les équations des perpendiculaires sont (43, II)

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \quad \frac{x}{A'} = \frac{y}{B'} = \frac{z}{C'};$$

par conséquent,

$$\cos(P, P') = \frac{AA' + BB' + CC'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

45. *Condition exprimant que deux plans sont perpendiculaires.* — D'après la dernière formule, cette condition est

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

46. *Conditions exprimant que deux plans sont parallèles.* —

(*) Si la droite était parallèle au plan des xy, le plan perpendiculaire ne pourrait plus être représenté par la dernière équation (18). Pour obtenir une équation qui subsiste dans tous les cas, il suffit de remplacer a et b par leurs valeurs $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. On trouve ainsi

$$(x - x')\cos\alpha + (y - y')\cos\beta + (z - z')\cos\gamma = 0.$$

Ces conditions, déjà trouvées dans le n° 35, résultent aussi de la formule précédente. Supposant $\cos(P, P') = 1$, on obtient effectivement

$$(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2=0,$$

ou $$(AB'-BA')^2+(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2=0;$$

d'où enfin $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

47. Problème IX. — *Trouver les angles que fait un plan avec les plans coordonnés.*

Reprenons la formule générale du n° 44, et supposons que le plan P' coïncide successivement avec les trois plans coordonnés; nous aurons

$$\cos(P, yz)=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(P, zx)=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(P, xy)=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

48. *Remarque.* — On trouverait directement les dernières formules, en cherchant les angles formés, avec les trois axes, par une perpendiculaire au plan P.

49. Problème X. — *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

Soient $$Ax+By+Cz+D=0, \quad (P)$$
$$x=az+p, \quad y=bz+q \quad (D)$$

les équations du plan P et de la droite D. Par l'origine, abaissons une perpendiculaire D' sur le plan P; l'angle formé par les droites D, D' sera le complément de l'angle cherché. D'ailleurs, les équations de la perpendiculaire sont

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C};$$

donc (25)

$$\cos(D, D')=\sin(P, D)=\frac{Aa+Bb+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

50. **Problème XI.** — *Calculer la distance δ de deux points* M', M'', *connaissant leurs coordonnées rectangulaires* x', y', z'; x'', y'', z''.

Si, par chacun des deux points, on fait passer trois plans, respectivement parallèles aux plans coordonnés, on formera un parallélipipède rectangle dont δ sera une diagonale. De plus, quelles que soient les positions des points M', M'', les arêtes de ce parallélipipède seront représentées par les valeurs absolues des binômes $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$.

Conséquemment

$$\delta = \sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}.$$

51. *Remarque.* — La distance de l'origine à un point (x', y', z') a pour expression

$$\delta = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

52. **Problème XII.** — *Trouver la distance d'un point donné à un plan donné.*

Le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan est représenté (43, II) par les *trois* équations

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (1)$$

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}. \quad (2)$$

D'ailleurs, δ étant la longueur de cette perpendiculaire, on a (50)

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (3)$$

Introduisant, dans l'équation du plan, les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ (*D. D.*, 115), et posant, pour abréger,

$$D'=Ax'+By'+Cz'+D,$$

on change cette équation en

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+D'=0.$$

Les propriétés des proportions donnent ensuite

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}$$

$$=-\frac{D'}{A^2+B^2+C^2}=\frac{\delta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

donc enfin $$\delta = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

53. *Remarques.* — I. La distance de l'origine au plan P a pour valeur

$$\delta = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

II. Dans ces formules, on donne au radical le signe du numérateur (*P. D.*, 116).

III. Soit p la distance de l'origine à un plan; soient α, β, γ les angles formés par p avec les trois axes: l'équation du plan est

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

54. Problème XIII. — *Trouver la distance d'un point donné* M *à une droite donnée* AB.

Première solution. — Les équations de la droite étant

$$x = az+p, \quad (1) \qquad y = bz+q, \quad (2)$$

imaginons, par le point M, un plan perpendiculaire à AB. Soit P le point où AB perce le plan: MP sera la distance cherchée δ. Or, le plan auxiliaire a pour équation (43)

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z') = 0. \quad (3)$$

De plus, $\delta^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2. \quad (4)$

Donc, en *résolvant les équations* (1), (2), (3) *par rapport à* $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, et en substituant les valeurs de ces inconnues dans l'équation (4), on aura la formule demandée. On obtient d'abord

$$x-x' = a(z-z')-(x'-az'-p),$$
$$y-y' = b(z-z')-(y'-bz'-q);$$

puis, en posant $A = x'-az'-p$, $B = y'-bz'-q$:

$$z-z' = \frac{aA+bB}{a^2+b^2+1},$$

$$y-y' = \frac{abA-(a^2+1)B}{a^2+b^2+1},$$

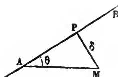
$$x-x' = \frac{-(b^2+1)A+abB}{a^2+b^2+1}.$$

Après quelques réductions faciles, on trouve enfin

$$\delta^2 = \frac{(b^2+1)A^2 - 2abAB + (a^2+1)B^2}{a^2+b^2+1}.$$

Seconde solution. — On arrive à un résultat plus symétrique, en procédant comme il suit :

Soient a, b, c les coordonnées d'un point A de la droite AB, et α, β, γ les angles formés par cette droite avec les axes. Le triangle rectangle APM donne



$$\delta = \mathrm{AM}\sin\theta.$$

D'un autre côté, en désignant par α', β', γ' les angles que fait AM avec les axes, on a (26, III)

$$\begin{aligned}\sin^2\theta = &(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')^2\\ &+(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')^2\\ &+(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')^2;\end{aligned}$$

et, par le principe des projections,

$$\cos\alpha' = \frac{x'-a}{\mathrm{AM}},\quad \cos\beta' = \frac{y'-b}{\mathrm{AM}},\quad \cos\gamma' = \frac{z'-c}{\mathrm{AM}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2 = &[(x'-a)\cos\beta - (y'-b)\cos\alpha]^2\\ &+[(y'-b)\cos\gamma - (z'-c)\cos\beta]^2\\ &+[(z'-c)\cos\alpha - (x'-a)\cos\gamma]^2\ (*).\end{aligned}$$

55. *Remarque.* — En projetant AM sur AB, puis AP sur les trois axes, on obtient, pour les coordonnées du point P,

$$x = a + l\cos\alpha,\quad y = b + l\cos\beta,\quad z = c + l\cos\gamma.$$

Dans ces formules,

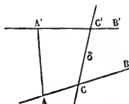
$$l = (x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma.$$

(*) A cause de $\delta^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 - \overline{\mathrm{AP}}^2$, on peut encore écrire, au lieu de la dernière formule,

$$\begin{aligned}\delta^2 = &(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2\\ &- [(x'-a)\cos\alpha + (y'-b)\cos\beta + (z'-c)\cos\gamma]^2.\end{aligned}$$

56. **Problème** XIV. — *Déterminer, en grandeur, la plus courte distance de deux droites* AB, A'B'.

En supposant, comme dans le Problème XIII, la droite AB déterminée par un de ses points A et par sa direction, nous avons, pour les équations de cette ligne,



$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}.$$

Semblablement, la droite A'B' est représentée par

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'}=\frac{y-b'}{\cos\beta'}=\frac{z-c'}{\cos\gamma'}.$$

Soit CC' la commune perpendiculaire à ces deux droites : la plus courte distance δ est la projection de AA' sur CC'. Appliquant le principe des projections, et représentant par λ, μ, ν les angles formés par CC' avec les axes, nous aurons donc

$$\delta=(a'-a)\cos\lambda+(b'-b)\cos\mu+(c'-c)\cos\nu.$$

Les angles λ, μ, ν doivent évidemment satisfaire aux relations

$$\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma=0,$$
$$\cos\lambda\cos\alpha'+\cos\mu\cos\beta'+\cos\nu\cos\gamma'=0,$$
$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

On tire, des deux premières,

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}$$
$$=\frac{\cos\mu}{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}$$
$$=\frac{\cos\nu}{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}.$$

En vertu de la troisième, chacun de ces rapports est égal à $\frac{1}{\sin\theta}$, θ étant l'angle des deux droites données (26, III). Par conséquent,

$$\delta=(a'-a)\frac{\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta}$$
$$+(b'-b)\frac{\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta}$$
$$+(c'-c)\frac{\cos\alpha\cos\beta'-\cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta}.$$

57. *Remarque.* — La perpendiculaire à deux droites données est déterminée, *en direction* (*), par les formules

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta},$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta}.$$

58. Problème XV. — *Déterminer, en position, la plus courte distance de deux droites.*

Soient, comme dans le problème précédent,

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'} = \frac{y-b'}{\cos\beta'} = \frac{z-c'}{\cos\gamma'}, \quad (2)$$

les équations des deux droites AB, A'B'. La plus courte distance CC' est l'intersection des deux plans ACC', A'C'C, dont il s'agit de trouver les équations.

On peut d'abord remarquer que l'équation de tout plan passant par la droite (1) peut être mise sous la forme

$$m\frac{x-a}{\cos\alpha} - (1+m)\frac{y-b}{\cos\beta} + \frac{z-c}{\cos\gamma} = 0, \quad (3)$$

m étant un paramètre arbitraire. Ce plan coïncidera avec ACC', si m satisfait à la condition

$$\frac{m}{\cos\alpha}\cos\lambda - \frac{1+m}{\cos\beta}\cos\mu + \frac{1}{\cos\gamma}\cos\nu = 0, \quad (4)$$

dans laquelle λ, μ, ν représentent, comme précédemment, les angles formés, avec les trois axes, par *la direction* de la plus courte distance. En effet, cette relation exprime que le plan (3) est parallèle à une droite faisant des angles λ, μ, ν avec les trois axes (40).

L'élimination de m, entre les équations (3), (4), donne

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu)(x-a)\\ &+(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)(y-b)\\ &+(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda)(z-c) = 0;\end{aligned}$$

(*) Mais non *en position*.

telle est l'équation du plan ACC'. Si l'on y remplace $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs

$$\frac{\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'}{\sin\theta},$$

$$\frac{\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'}{\sin\theta},$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'}{\sin\theta},$$

elle devient, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha\cos\theta - \cos\alpha')(x-a)\\ &+(\cos\beta\cos\theta - \cos\beta')(y-b)\\ &+(\cos\gamma\cos\theta - \cos\gamma')(z-c) = 0,\end{aligned}$$

ou $$\left.\begin{aligned}&[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma]\cos\theta\\ &= (x-a)\cos\alpha' + (y-b)\cos\beta' + (z-c)\cos\gamma'.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Semblablement, le plan A'C'C est représenté par

$$\left.\begin{aligned}&[(x-a')\cos\alpha' + (y-b')\cos\beta' + (z-c')\cos\gamma']\cos\theta\\ &= (x-a')\cos\alpha + (y-b')\cos\beta + (z-c')\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les équations (5), (6) sont celles qu'il s'agissait d'obtenir.

EXERCICES.

I. Les coordonnées étant obliques :

1°. Exprimer qu'une droite et un plan sont perpendiculaires.

2°. Déterminer l'angle de deux plans.

3°. Exprimer que deux plans sont perpendiculaires.

4°. Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.

II. Trouver les équations de la bissectrice de l'angle formé par deux droites données.

Résultat : Les équations des droites étant

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}, \quad \frac{x}{\cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma'},$$

la bissectrice est représentée par

$$\frac{x}{\cos\alpha + \cos\alpha'} = \frac{y}{\cos\beta + \cos\beta'} = \frac{z}{\cos\gamma + \cos\gamma'}.$$

III. Lieu des points également distants de deux droites qui se coupent.

IV. Lieu des points également distants de deux droites non situées dans un même plan.

Équation du lieu: $xy = mz.$

V. Lieu d'une droite qui rencontre, sous deux angles égaux, deux droites données, non situées dans un même plan.

Équation du lieu: $xy = mz.$

VI. Lieu décrit par l'arête d'un angle dièdre droit, dont les faces passent respectivement par deux droites données.

Équation du lieu: $a^2x^2 - y^2 + (a^2 - 1)z^2 = (a^2 - 1)b^2.$

VII. Lieu des points tels, que la distance de chacun d'eux à un point quelconque d'une ellipse donnée, soit une fonction entière et du premier degré des coordonnées de ce dernier point.

Résultat: L'ellipse donnée ayant pour équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad z = 0,$$

le lieu est l'hyperbole représentée par

$$(a^2 - b^2)z^2 - a^2x^2 = -a^2(a^2 - b^2), \quad y = 0.$$

VIII. Former les équations d'une droite qui rencontre, sous les angles φ, φ', deux droites ayant pour équations

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma},$$

$$\frac{-a'}{\cos\alpha'} = \frac{y - b'}{\cos\beta'} = \frac{z - c'}{\cos\gamma'}.$$

Résultat: θ étant l'angle des deux droites données, on trouve les deux équations

$$(l\cos\theta - m)^2$$
$$= [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - l^2](\cos\theta\cos\varphi - \cos\varphi')^2,$$
$$(l'\cos\theta - m')^2$$
$$= [(x - a')^2 + (y - b')^2 + (z - c')^2 - l'^2](\cos\theta\cos\varphi' - \cos\varphi)^2,$$

dans lesquelles

$$l = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma,$$
$$l' = (x-a')\cos\alpha' + (y-b')\cos\beta' + (z-c')\cos\gamma';$$
$$m = (x-a)\cos\alpha' + (y-b)\cos\beta' + (z-c)\cos\gamma',$$
$$m' = (x-a')\cos\alpha + (y-b')\cos\beta + (z-c')\cos\gamma.$$

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

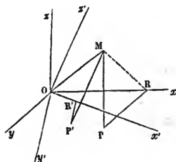
59. **Première transformation.** — *Transporter les axes parallèlement à eux-mêmes.*

Les principes dont nous avons fait usage dans la *Géométrie analytique à deux dimensions* (88) donnent, pour les formules cherchées,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c;$$

a, b, c représentant les coordonnées de la nouvelle origine.

60. **Deuxième transformation.** — *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système quelconque d'axes, de même origine que le premier.*



Soient x, y, z les coordonnées *rectangulaires* d'un point quelconque M; soient x', y', z' les coordonnées de ce point, relativement à trois axes quelconques Ox', Oy', Oz' passant par la première origine. Si nous projetons sur Ox le contour polygonal OR'P'M et la droite OM qui le ferme, nous aurons

$$\text{OR} = \text{OR}'\cos x'\text{O}x + \text{R}'\text{P}'\cos y'\text{O}x + \text{P}'\text{M}\cos z'\text{O}x,$$

ou $$x = x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x).$$

Un simple changement de lettres donne ensuite

$$y = x'\cos(x',y) + y'\cos(y',y) + z'\cos(z',y),$$
$$z = x'\cos(x',z) + y'\cos(y',z) + z'\cos(z',z).$$

Pour abréger, on écrit ainsi ces formules :

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz', \\ y &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z'; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

mais on fait attention que, les droites Ox, Oy, Oz étant rectangulaires, les neuf cosinus désignés par a, b, c, a', b' c', a'', b'', c'' doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

61. Troisième transformation. — *Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, ayant même origine.*

Il suffit évidemment, pour résoudre cette question, d'employer les formules (1), en y joignant de nouvelles équations de condition, propres à exprimer que les nouveaux axes sont rectangulaires. Ces équations sont (27) :

$$\left.\begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

62. Remarques. — I. Lorsque les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, les neufs quantités a, b, c,... devant satisfaire aux *six* équations (2), (3), il en reste *trois* dont on peut disposer arbitrairement ; mais de manière, cependant, qu'il en résulte des valeurs réelles pour les six autres.

II. Si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées, respectivement, par a, a', a'', par b, b', b'', par c, c', c'', on trouve

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

III. On aurait pu obtenir, sans aucun calcul, ces dernières valeurs; car les deux systèmes d'axes étant rectangulaires, les nouvelles coordonnées doivent se déduire des anciennes, absolument comme celles-ci ont été déduites des autres.

IV. De la dernière remarque, on conclut que les quantités a, b, c,... doivent satisfaire aux *six* nouvelles relations

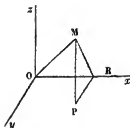
$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

analogues aux équations (2) et (3).

63. Quatrième transformation. — *Passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées polaires.*

Prenant l'origine pour pôle et Ox pour axe polaire, nous aurons, dans les deux triangles *rectangles* ORM, MPR,



$$\mathrm{OR} = \mathrm{OM}\cos\mathrm{MO}x, \quad \mathrm{MR} = \mathrm{OM}\sin\mathrm{MO}x,$$
$$\mathrm{RP} = \mathrm{MR}\cos\mathrm{MRP}, \quad \mathrm{MP} = \mathrm{MR}\sin\mathrm{MRP},$$

c'est-à-dire, en conservant les notations du n° 14:

$$x = u\cos\theta,$$
$$y = u\sin\theta\cos\psi,$$
$$z = u\sin\theta\sin\psi:$$

telles sont les formules cherchées.

Applications de la transformation des coordonnées.

64. Théorème I. — *Un changement de coordonnées rectilignes ne change pas le degré de l'équation d'une surface algébrique* (*D. D.*, 94).

65. Théorème II. — *Une surface d'ordre m ne peut être rencontrée en plus de m points par une droite* (*D. D.*, 98).

66. Théorème III. — *Une surface d'ordre m ne peut être coupée par un plan suivant une ligne d'un ordre supérieur à m.*

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface, équation que l'on suppose de degré m. Si l'on rapporte cette surface à de nouveaux axes, en prenant pour plan des $x'y'$ le plan sécant, on obtiendra une équation $F(x', y', z') = 0$, dont le degré sera m (64). La section faite par le plan donné sera représentée par cette dernière équation, jointe à $z' = 0$; donc, etc.

67. PROBLÈME I. — *Exprimer la distance de deux points, en fonction de leurs coordonnées obliques.*

Cherchons d'abord la distance δ d'un point quelconque M à l'origine des coordonnées. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point, x', y', z' étant ses coordonnées obliques. Nous aurons

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

ou, en substituant pour x, y, z, leurs valeurs (60) :

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ & + 2(ab + a'b' + a''b'')x'y' \\ & + 2(bc + b'c' + b''c'')y'z' \\ & + 2(ca + c'a' + c''a'')z'x'.\end{aligned}$$

Mais (61)

$$\begin{aligned} & ab + a'b' + a''b'' = \cos(x', y'), \\ & bc + b'c' + b''c'' = \cos(y', z'), \text{ etc.;}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ & + 2x'y'\cos(x', y') + 2y'z'\cos(y', z') + 2z'x'\cos(z', x').\end{aligned}$$

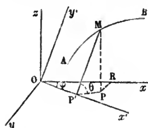
Pour passer au cas général, il suffit de supposer que les axes soient transportés parallèlement à eux-mêmes, de manière que les coordonnées du point O soient x'', y'', z'' : les quantités x', y', z', qui entrent dans la formule précédente, devront être remplacées par $x' - x''$, $y' - y''$, $z' - z''$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta^2 = {} & (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 \\ & + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos(x', y') \\ & + 2(y' - y'')(z' - z'')\cos(y', z') \\ & + 2(z' - z'')(x' - x'')\cos(z', x').\end{aligned}$$

68. PROBLÈME II. — *Déterminer la section d'une surface par un plan.*

Soient $F(x, y, z) = 0$, (1) $\quad Ax + By + Cz = 0$ (2)

les équations de la surface et du plan, en supposant, pour plus de simplicité, que celui-ci passe par l'origine. Si l'on éliminait z entre ces deux équations, on obtiendrait une équation $\varphi(x, y) = 0$ représentant, non la section AMB, mais sa projection sur le plan des xy (38). Pour obtenir cette section en *vraie grandeur*, on doit donc la rapporter à deux axes situés dans son plan. Nous prendrons, pour l'un de ces axes, la *trace* Ox' du plan sécant sur le plan des xy, l'autre axe Oy' étant perpendiculaire au premier.



Cela posé, soient OR, RP, PM les coordonnées d'un point quelconque M de la section, relativement aux trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et OP', P'M ses coordonnées par rapport à Ox', Oy'.

La projection P'P de PM étant perpendiculaire à P'M, l'angle MP'P mesure l'inclinaison du plan sécant sur le plan yOx. Par suite, en appelant φ l'angle xOx', nous aurons

$$\begin{aligned} OR &= OP' \cos\varphi + P'M \cos\theta \sin\varphi, \\ RP &= OP' \sin\varphi - P'M \cos\theta \cos\varphi, \\ PM &= P'M \sin\theta, \end{aligned}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi + y' \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= x' \sin\varphi - y' \cos\varphi \cos\theta, \\ z &= y' \sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

69. *Remarque.* — Pour appliquer ces formules, on devra connaître les angles φ et θ. Or, en faisant $z = 0$ dans l'équation (2), on obtient

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi = -\frac{A}{B}, \quad \sin\varphi = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

et, d'un autre côté (47),

$$\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}.$$

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+a'^2+a''^2=1, & ab+a'b'+a''b''=0, \\ b^2+b'^2+b''^2=1, & bc+b'c'+b''c''=0, \\ c^2+c'^2+c''^2=1, & ca+c'a'+c''a''=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

par rapport aux quantités a'', b', b'', c, c', c''.

Résultat : En posant

$$a = \cos\theta,$$
$$a' = \sin\theta \sin\psi,$$
$$b = -\sin\theta\sin\varphi;$$

on trouve

$$a'' = \sin\theta\cos\psi,$$
$$b' = \cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi,$$
$$b'' = \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\psi,$$
$$c = -\sin\theta\cos\varphi,$$
$$c' = \cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi,$$
$$c'' = \cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\psi \ (*).$$

II. *Théorème.* — Si neuf quantités satisfont aux *six* équations (1), elles satisfont également : 1° aux *six* équations

$$\left.\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=1, & aa'+bb'+cc'=0, \\ a'^2+b'^2+c'^2=1, & a'a''+b'b''+c'c''=0, \\ a''^2+b''^2+c''^2=1, & a''a+b''b+c''c=0; \end{array}\right\} \quad (2)$$

2° aux *dix* équations

$$\left.\begin{array}{lll} b'c''-c'b''=\pm a, & c'a''-a'c''=\pm b, & c''a-a''c=\pm c, \\ b''c-c''b=\pm a', & c''a-a''c=\pm b', & a''b-b''a=\pm c', \\ bc'-cb'=\pm a'', & ca'-ac'=\pm b'', & b''c-c''b=\pm c'', \\ \multicolumn{3}{c}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=\pm 1;} \end{array}\right\} \quad (3)$$

3° à l'équation

$$a^2a'^2a''^2+b^2b'^2b''^2+c^2c'^2c''^2=a^2b^2c^2+a'^2b'^2c'^2+a''^2b''^2c''^2; \quad (4)$$

(*) Ces formules, très-utiles dans la Mécanique rationnelle, sont connues sous le nom de *formules d'Euler*.

4° à l'équation

$$15m^2+(r-s)^2+(r'-s')^2+(r''-s'')^2+4pq=0, \quad (5)$$

dans laquelle $m^2=a^2a'^2a''^2+b^2b'^2b''^2+c^2c'^2c''^2$,

$$p=ab'c''+a'b''c+a''bc', \quad q=ab''c'+a'bc''+a''bc',$$
$$r=ab'b''+a'b''b+a''bb', \quad s=ac'a''+a'c''c+a''cc',$$
$$r'=bc'c''+b'c''c+b''cc', \quad s'=ba'a''+b'a''a+b''aa',$$
$$r''=ca'a''+c'a''a+c''aa', \quad s''=cb'b''+c'b''b+c''bb'. \ (*)$$

III. Les coordonnées étant obliques :

1°. Trouver la distance d'un point donné à un plan donné;

2°. Trouver la distance d'un point donné à une droite donnée;

3°. Déterminer, en grandeur, la plus courte distance de deux droites (**).

CHAPITRE V.

DU CENTRE DANS LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

70. L'équation la plus générale du second degré, entre les trois variables x, y, z, étant

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z)=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy \\ \quad +2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}=0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

examinons si la surface qu'elle représente peut avoir un *centre*, c'est-à-dire *un point tel, que les points de la surface soient, deux à deux, symétriquement placés par rapport à ce point* (*D. D.*, 187). A cet effet, changeons x, y, z en $x+a$, $y+b$, $z+c$ (*D. D.*, 196), et cherchons à déterminer les coordonnées a, b, c de la nouvelle origine, de manière à faire disparaître les termes du premier degré

(*) Les relations (4) et (5) sont dues à l'illustre Jacobi.

(**) On résout aisément les trois derniers problèmes en exprimant que la distance cherchée est un minimum.

(*D. D.*, 190). Nous obtiendrons ainsi les équations de condition :

$$\left.\begin{aligned} Aa + B'c + B''b + C &= 0, \\ A'b + B''a + Bc + C' &= 0, \\ A''c + Bb + B'a + C'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dont *les premiers membres sont*, à un facteur près, *les dérivées* PARTIELLES *de* $f(x, y, z)$, *dans lesquelles on remplace* x, y, z *par* a, b, c (*D. D.*, 196). En même temps, nous aurons, au lieu de (1), l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + D' = 0, \quad (3)$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} D' = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab \\ + 2Ca + 2C'b + 2C''c + D. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

71. *Discussion :* 1°. Lorsqu'on peut satisfaire aux *équations du centre* par des valeurs de a, b, c, *finies et déterminées*, la surface admet *un centre unique*, et la réduction à la forme (3) est possible d'une seule manière. De plus, si l'on ajoute membre à membre les équations (4) et (2), après avoir multiplié les trois dernières par a, b, c, on trouve

$$D' = Ca + C'b + C''c + D \quad (5).$$

Ainsi *le terme indépendant des variables, dans l'équation transformée, se compose du terme indépendant primitif, augmenté de la demi-somme des termes du premier degré, etc.* (*D. D.*, 200).

2°. Lorsque les équations (2) sont *incompatibles*, la surface est *dépourvue de centre.*

3°. Si le système (2) se réduit à *deux équations* distinctes, la surface a *une infinité de centres, dont le lieu est la droite* représentée par deux quelconques des équations (2) (*).

4°. Enfin, si les équations (2) se réduisent à *une seule équation*, la surface admet *une infinité de centres*, *ayant pour lieu le plan* représenté par cette équation.

(*) Les coordonnées a, b, c étant regardées comme des variables, chacune des équations (2) représente un plan. Dans le cas que nous considérons, les trois plans se coupent suivant une même droite, *lieu des centres.*

72. Dans le cas où *le lieu des centres* est *une droite* AB, l'équation (1) représente un *cylindre elliptique* ou *hyperbolique*, ayant pour variétés : *une droite, un lieu imaginaire*, ou *deux plans non parallèles*.

En effet, tout plan passant par AB coupe la surface suivant une ligne du second ordre (66) qui admet évidemment pour centres tous les points de AB; cette ligne se réduit donc au système de deux parallèles CD, C'D', situées à égales distances de AB; et, par conséquent, la surface est un cylindre ayant AB pour *axe* de figure. Mais, d'un autre côté, tout plan qui rencontre AB en un point O coupe la surface suivant une ligne ayant le point O pour centre; etc.



73. On voit, avec la même facilité, que *si le lieu des centres est un plan*, l'équation (1) représente *deux plans parallèles*, ou *deux plans confondus en un seul*, ou *un lieu imaginaire*.

74. *Remarques*. — I. Dans les deux derniers cas, l'équation (1) peut, d'une infinité de manières, être réduite à la forme (3).

II. Pour qu'il y ait *un centre unique*, il faut et il suffit que le *déterminant* du système (2) soit *différent de zéro*. Ce déterminant a pour valeur

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 \ (*).$$

(*) Si l'on dispose ainsi les coefficients A, A', A'', B, B', B'' :

A,	A',	A'',
B,	B',	B'',
B,	B',	B'',

on voit que le déterminant est égal à la somme des produits des termes contenus dans les colonnes horizontales, moins la somme des produits des termes contenus dans les colonnes verticales. Ce procédé mnémotechnique a été indiqué par MM. Sonnet et Frontera.

EXERCICES.

I. Appliquer la théorie du centre aux surfaces représentées par les équations suivantes :

$$x^2+y^2+z^2-4yz+2zx-2xy+2x-4y-4z+1=0,$$
$$2(x-y-z)-(3x-y+4z)^2=0,$$
$$(x-y+z)^2+(3x-y+5z)^2=1.$$

II. Déterminer le centre de la surface qui a pour équation

$$x^3+y^3+z^3-xyz+3x^2-3y^2+3z^2$$
$$-yz+zx-xy+4x+2y+4z+2=0.$$

III. Trouver *les centres* de la surface dont l'équation est

$$\cos x+\cos y+\cos z=1.$$

IV. Trouver *les centres* de la courbe à double courbure représentée par les équations

$$x^2=\cos z,\quad y=\sin z.$$

V. L'hélice a-t-elle un centre ?

VI. *Théorème.* — Si l'on désigne par x', x'', y', y'', z', z'' les distances comprises entre le sommet d'un angle trièdre trirectangle et les points où les arêtes de ce trièdre rencontrent une surface du second ordre, la fonction

$$\frac{(x'+x'')^2}{x'^2+x''^2}+\frac{(y'+y'')^2}{y'^2+y''^2}+\frac{(z'+z'')^2}{z'^2+z''^2}$$

est invariable, quelle que soit la position de l'angle trièdre. (*Théorème de M. Steiner.*)

CHAPITRE VI.

DES PLANS DIAMÉTRAUX ET DES PLANS PRINCIPAUX.

Équation générale des plans diamétraux.

75. Cherchons le lieu géométrique des milieux d'une série de droites parallèles à une direction donnée, et terminées à la sur-

face du second ordre ayant pour équation

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Soient $\qquad x = mz + \alpha, \quad y = nz + \beta \quad (2)$

les équations d'une de ces droites. En portant ces valeurs de x et de y dans l'équation (1), nous obtiendrons une équation de la forme

$$Rz^2 + 2Sz + T = 0, \quad (3)$$

dont les racines représenteront les *ordonnées* des points où la surface est rencontrée par la droite dont il s'agit, c'est-à-dire les ordonnées des extrémités de la *corde* déterminée par cette droite. Par suite (*D. D.*, 178) : 1° l'ordonnée du point milieu de la corde a pour valeur la racine de l'équation

$$Rz + S = 0, \quad (4)$$

dérivée de (3); 2° la *surface diamétrale* cherchée a pour équation

$$mf'_x + nf'_y + f'_z = 0, \quad (5)$$

ou

$$\begin{array}{l} (Ax + B'z + B''y + C)m \\ + (A'y + Bz + B''x + C')n \\ + A''z + By + B'x + C'' = 0, \end{array}$$

ou encore

$$\left. \begin{array}{l} (Am + B''n + B')x + (B''m + A'n + B)y \\ + (B'm + Bn + A'')z + Cm + C'n + C'' = 0. \end{array} \right\} \quad (6)$$

76. Remarques. — I. *Dans toute surface du second ordre, les surfaces diamétrales sont des plans.*

II. L'équation (5) étant une conséquence des équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

qui représentent le centre (70), il s'ensuit que *tous les plans diamétraux passent par le centre, ou par le lieu des centres.* De plus, *chacune des équations du centre représente un plan diamétral.*

III. Si les trois équations du centre se réduisent à $f'_x = 0$, l'équation (5) est vérifiée, quelles que soient les valeurs de m et de n.

Dans ce cas, *tous les plans diamétraux coïncident avec le lieu des centres*. Ce résultat du calcul est évident à priori; car la surface se compose de deux plans parallèles (73).

IV. Le plan diamétral, représenté généralement par l'équation (6), cessera d'exister si l'on a

$$Am+B''n+B'=0,\quad A'n+B+B''m=0,$$

$$A''n+B'm+Bn=0,\quad Cm+C'n+C''\gtrless 0.$$

Les trois premières relations expriment que la droite représentée par les équations (2), au lieu d'intercepter une corde sur la surface, rencontre celle-ci en un seul point : en effet, ces équations donnent

$$(Am+B''n+B')m+(A'n+B+B''m)n+A''+B'm+Bn=0,$$

ou $$Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn=0,$$

ou $$R=0.$$

V. On reconnaît, avec la même facilité, que si l'on a

$$Am+B''n+B'=0,\quad A'n+B+B''m=0,$$
$$A''+B'm+Bn=0,\quad Cm+C'n+C''=0,$$

auquel cas l'équation (6) devient identique, il en résulte

$$R=0,\quad S=0\ (*).$$

D'après l'équation (3), ces deux dernières relations sont vérifiées dans deux cas : 1° lorsque la droite représentée par les équations (2) ne rencontre pas la surface; 2° lorsque cette droite est tout entière sur la surface.

VI. Si les coordonnées sont rectangulaires, et que a, b, c représentent les cosinus des angles formés avec les axes par la direction commune des cordes, l'équation (6) peut être remplacée par

$$\left.\begin{array}{l}(Aa+B''b+B'c)x+(A'b+Bc+B''a)y\\ +(A''c+B'a+Bb)z+Ca+C'b+C''c=0.\end{array}\right\}\quad(7)$$

(*) La fonction S a pour valeur

$$Am\alpha+A'n\beta+B\beta+B'\alpha+B''(m\beta+n\alpha)+Cm+C'n+C''$$

ou $$(Am+B''n+B')\alpha+(A'n+B+B''m)\beta+Cm+C'n+C''.$$

Des plans principaux.

77. Lorsqu'un plan diamétral est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales, on lui donne le nom de *plan principal*. Afin de chercher si les surfaces du second ordre admettent des plans principaux, supposons les axes rectangulaires, et reprenons l'équation (7), qui représente le plan diamétral *conjugué* aux cordes parallèles à la direction déterminée par

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}. \quad (8)$$

Ce plan sera principal si les cosinus a, b, c satisfont aux relations

$$\frac{Aa+B''b+B'c}{a}=\frac{A'b+Bc+B''a}{b}=\frac{A''c+B'a+Bb}{c}. \quad (9)$$

En représentant par s la valeur commune de ces rapports, on peut remplacer les *deux* équations (9) par les *trois* équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}(A-s)a+B''b+B'c=0,\\ (A'-s)b+Bc+B''a=0,\\ (A''-s)c+B'a+Bb=0.\end{array}\right\} \quad (10)$$

On conclut, des deux premières,

$$\frac{a}{c}=\frac{-B'(A'-s)+BB''}{(A-s)(A'-s)-B''^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{-B(A-s)+B'B''}{(A-s)(A'-s)-B''^2}; \quad (11)$$

puis, par la substitution dans la troisième,

$$\begin{array}{l}(A-s)(A'-s)(A''-s)+2BB'B''\\ -(A-s)B^2-(A'-s)B'^2-(A''-s)B''^2=0 \ (*),\end{array}$$

(*) En comparant le premier membre à la valeur de Δ (**74**), on voit qu'il est égal au *déterminant* des quantités

$$\begin{array}{ccc}(A-s), & B'', & B',\\ B'', & (A'-s), & B,\\ B', & B, & (A''-s).\end{array}$$

C'est ce qu'il était facile de prévoir; car les cosinus a, b, c ne pouvant être nuls tous trois, il faut, pour que les équations (10) soient compatibles, que ce déterminant soit égal à zéro.

ou
$$s^3 - Ms^2 - Ns - \Delta = 0, \quad (12)$$
en posant, pour abréger :
$$M = A + A' + A'',$$
$$N = B^2 - A'A'' + B'^2 - A''A + B''^2 - AA',$$
$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2.$$

78. L'équation *caractéristique* (12), étant du troisième degré, a au moins une racine réelle, dont la substitution, dans les formules (11), donnera des valeurs réelles pour a, b, c (*). Si ces valeurs, substituées à leur tour dans l'équation (7), n'annulent pas les coefficients de x, de y et de z, cette équation représentera un plan principal, et l'on sera en droit d'affirmer que, *dans toute surface du second ordre, il existe au moins un plan principal.* Quoi qu'il en soit, le calcul précédent démontre l'existence d'un système de *droites principales* (**) dont la direction satisfait aux équations (10), et ce résultat suffit à l'objet que nous avons en vue.

79. *Remarque.* — A cause des relations (10), on peut écrire ainsi *l'équation du plan principal :*
$$(ax + by + cz)s + Ca + C'b + C''c = 0. \quad (9)$$

(*) On ne doit pas oublier que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. En outre, les formules (11) donnant
$$\frac{a}{-B'(A'-s)+BB''} = \frac{b}{-B(A-s)+B'B''}$$
ou
$$\frac{a}{\frac{1}{-B(A-s)+B'B''}} = \frac{b}{\frac{1}{-B'(A'-s)+BB''}},$$
on en conclut, à cause de la symétrie des équations (10),
$$\frac{a}{\frac{1}{-B(A-s)+B'B''}} = \frac{b}{\frac{1}{-B'(A'-s)+B''B}} = \frac{c}{\frac{1}{-B''(A''-s)+BB'}}.$$
Ces dernières relations deviendraient illusoires si l'on avait, à la fois,
$$B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0.$$

(**) Nous employons cette dénomination pour éviter toute difficulté.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — 1° L'équation caractéristique (12) a toujours ses trois racines réelles; 2° parmi ces trois racines, il y en a au moins une différente de zéro.

II. *Théorème* — Les droites principales qui correspondent à deux valeurs différentes de s sont perpendiculaires entre elles.

III. Déterminer les trois systèmes de cordes principales et les trois plans principaux de la surface représentée par

$$2x^2+4y^2-z^2+4yz-4zx-8xy+2x+4y+2z=0.$$

Résultats :

1°. $s^3-5s^2-22s-16=0,\quad s=-1,\quad s'=8,\quad s''=-2;$

2°. $$\frac{a}{2}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-1}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{a'}{4}=\frac{b'}{-5}=\frac{c'}{-2}=\frac{1}{\sqrt{45}},$$

$$\frac{a''}{1}=\frac{b''}{0}=\frac{c''}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

3°. $$-(2x+2y-z)+5=0,$$

$$8(4x-5y-2z)-8=0,$$

$$-2(x+2z)+3=0.$$

CHAPITRE VII.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ.

Disparition des rectangles.

80. Si l'on prend pour axe des z une *droite principale*, les équations (10) du n° 77 devront être vérifiées par $a=0$, $b=0$, $c=1$; ce qui exige que

$$B=0,\quad B'=0,\quad s=A''.$$

Ainsi, *lorsque l'axe des z est une droite principale, l'équation de la surface ne contient aucun des deux rectangles xz, yz; en sorte qu'elle prend la forme*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0. \quad (1)$$

En même temps, l'une des valeurs de s est égale à A'' (*).

81. Pour que le terme en xy disparaisse, faisons tourner les axes des x et des y dans leur plan, en les laissant rectangulaires, c'est-à-dire employons les formules

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

$$\tang 2\alpha=\frac{2B''}{A-A'}\ (D.\ D.,\ 201);$$

et nous obtiendrons une équation

$$Px^2+P'y^2+P''z^2+2Qx+2Q'y+2Q''z+R=0, \quad (2)$$

qui renferme encore *toutes les surfaces du second ordre, avec leurs variétés* (**).

Réduction aux deux formes principales.

82. Les équations qui déterminent le centre de la surface (2) sont (70)

$$Px_1+Q=0,\quad P'y_1+Q'=0,\quad P''z_1+Q''=0.$$

Lorsque les coefficients P, P', P'' sont tous différents de zéro, ces équations donnent des valeurs finies et déterminées pour x_1, y_1, z_1, en sorte que *la surface a un centre unique*. Dans ce cas,

---

(*) Les valeurs des deux autres racines, données par la formule

$$s=\tfrac{1}{2}\left[A+A'\pm\sqrt{(A-A')^2+B''^2}\right],$$

sont évidemment réelles. Il n'est pas difficile de conclure de là que, *dans tous les cas, l'équation* (12) *a ses trois racines réelles*. La discussion complète de cette équation est une question fort intéressante, que nous sommes obligé de passer sous silence.

(*) On a (*D. D.*, 204)

$$P+P'=A+A',\quad P-P'=\sqrt{(A-A')^2+4B''^2},\quad P''=A'',$$

$$Q=C\cos\alpha+C'\sin\alpha,\quad Q'=-C\sin\alpha+C'\cos\alpha,\quad Q''=C'',\quad R=D.$$

transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à prendre le centre pour origine; nous obtiendrons une équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H, \quad (A)$$

qui représente une *première classe* de surfaces du second ordre (*).

83. Si un seul des coefficients P, P', P'' est nul, et que le terme tout connu qui lui correspond soit différent de zéro, la surface n'a pas de centre, et la transformation précédente n'est plus possible. Mais on peut disposer de la nouvelle origine de manière à faire disparaître le terme indépendant et deux des termes du premier degré.

Soient, par exemple, $P = 0, \quad Q \gtrless 0.$

Si l'on change x, y, z en $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, on déterminera x_1, y_1, z_1 par les équations

$$P'y_1^2 + P''z_1^2 + 2Qx_1 + 2Q'y_1 + 2Q''z_1 + R = 0 \text{ (**)},$$
$$P'y_1 + Q' = 0, \quad P''z_1 + Q'' = 0;$$

et les surfaces de la *seconde classe* seront représentées par

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0. \quad (B)$$

84. Supposons $P = 0, \quad Q = 0.$

Alors l'équation (2) devenant

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Q'y + 2Q''z + R = 0,$$

représente évidemment un *cylindre elliptique ou hyperbolique*. Cette surface ne constitue pas une nouvelle classe; car elle peut être donnée par l'équation (A), dans laquelle on supposerait $P = 0$.

85. Si l'équation (2) ne contient ni x^2 ni y^2, elle se réduit à

$$P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + 2Q''z + R = 0.$$

En combinant cette dernière équation avec $z = h$, on obtient un

---

(*) $-H = Qx_1 + Q'y_1 + Q''z_1 + R$ (71).

(**) Cette première équation, simplifiée au moyen des deux autres, se réduit à

$$2Qx_1 + Q'y_1 + Q''z_1 + R = 0.$$

résultat de la forme $Qx + Q'y + k = 0$. Par conséquent, la surface est *un cylindre*. Ce cylindre est *parabolique ;* car $y = 0$ donne $P''z + 2Qx + 2Q''z + R = 0$, équation d'une parabole. Ce genre particulier de surfaces rentre dans la *seconde classe ;* car l'équation (B), quand on suppose $P' = 0$, représente un cylindre parabolique.

86. On ne peut pas supposer $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, attendu que l'équation (2) se réduirait au premier degré.

87. En résumé, toutes les surfaces du second ordre sont comprises dans les *deux classes* représentées par les équations (A) et (B). La première classe contient les *surfaces à centre unique* et les *surfaces qui ont une infinité de centres ;* la seconde classe (Q étant supposé différent de zéro) renferme les *surfaces dépourvues de centre.*

EXERCICES.

I. *Théorème.* — L'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$

étant réduite à la forme

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 + 2Qx + 2Q'y + 2Q''z + R = 0,$$

les coefficients P, P', P'' ont pour valeurs les trois racines de l'équation caractéristique.

II. *Théorème.* — L'intersection de deux surfaces du second ordre, dont les plans principaux sont respectivement parallèles, est située sur une surface de révolution.

III. Rapporter, à son centre et à ses plans principaux, la surface représentée par

$$2x^2 + 4y^2 - z^2 + 4yz - 4xz - 8xy + 2x + 4y + 2z = 0 \text{ (page 43)}.$$

Résultat : $\quad -x^2 + 8y^2 - 2z^2 + \frac{7}{2} = 0.$

CHAPITRE VIII.

DISCUSSION DES SURFACES A CENTRE.

88. On a vu (82) que toutes ces surfaces sont comprises dans l'équation

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H. \quad (A)$$

Quelles que soient les valeurs des coefficients, *l'origine est un centre* (70). De plus, les axes étant rectangulaires, *les plans coordonnés sont des plans principaux.*

89. Pour simplifier la discussion, nous considérerons d'abord les cas dans lesquels l'équation (A) est *complète.* Comme le terme H peut toujours être supposé *positif*, ces cas sont au nombre de *quatre :*

1°. *Les trois carrés positifs ;*

2°. *Deux carrés positifs, un carré négatif ;*

3°. *Un carré positif, deux carrés négatifs ;*

4°. *Les trois carrés négatifs.*

Dans ce dernier cas, *l'équation* (A) *ne représente rien :* il nous reste donc à examiner les trois autres hypothèses.

Ellipsoïde.

90. En suivant la marche adoptée pour la discussion de l'ellipse (*D. D.*, 211), on trouve que : 1° la surface a *six sommets* A, A', B, B', C, C', déterminés par

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{H}{P}} = \pm a;$$

$$z = 0, \quad x = 0, \quad y = \pm\sqrt{\frac{H}{P'}} = \pm b;$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\sqrt{\frac{H}{P''}} = \pm c.$$

2°. L'équation (A) peut être remplacée par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

3°. Les *traces* de la surface, sur les plans coordonnés, sont les ellipses ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{a^2}=1.$$

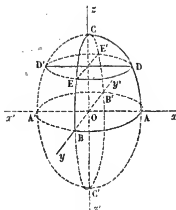
91. *Sections parallèles aux plans principaux.* — Si, dans l'équation (1), on fait $z=\gamma$, on obtient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Cette équation représente une *ellipse*, un *point*, ou un *lieu imaginaire*, suivant que γ est inférieur, égal ou supérieur à c. En excluant les deux dernières hypothèses, on peut donc dire que *les sections parallèles à un plan principal sont des ellipses.* De plus, *ces ellipses sont semblables;* car les demi-axes de chacune d'elles étant donnés par les formules

$$A=a\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{c^2}},\quad B=b\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{c^2}},$$

il s'ensuit que $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}=\text{const.}$$



92. *Génération de la surface.* — Il résulte, de cette discussion, que *la surface peut être engendrée par une ellipse* DED'E', *toujours semblable à elle-même, dont les sommets* D, D' *s'appuieraient sur une ellipse directrice* ACA'C', *et dont le plan resterait constamment perpendiculaire à l'axe* CC' *de cette courbe.*

93, *Sections par des plans quelconques.* — En combinant l'équation (A) avec $z=mx+ny+p$, on obtient

$$(P+P''m^2)x^2+2P''mnxy+(P'+P''n^2)y^2+\ldots=H.$$

Le binôme B^2-4AC se réduit à $-4(PP'+PP''n^2+P'P''m^2)$, quantité essentiellement négative. Les projections des sections

planes et *ces sections* mêmes *sont* donc *des ellipses :* pour cette raison, la surface est appelée *ellipsoïde.*

94. *Cas particuliers de l'ellipsoïde.* — 1°. Lorsque deux des sections principales sont égales entre elles, la surface devient un *ellipsoïde de révolution* autour de l'axe perpendiculaire à la troisième section principale. Par exemple, si $a=b$, l'équation (1) se réduisant à

$$x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

il est évident que la surface peut être engendrée par la demi-ellipse CAC' tournant autour de CC'. De plus, *tout plan passant par l'axe de rotation est un plan principal.*

2°. Si $a=b=c$, l'ellipsoïde se réduit à une *sphère.*

Hyperboloïde à une nappe.

95. *Sommets, axes, etc.* — Dans l'équation (A), supposons P, P' positifs, P'' négatif; nous aurons, en mettant les signes en évidence,

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H.$$

Opérant ensuite comme dans le cas de l'ellipsoïde, nous trouverons que:

1°. La surface a *quatre sommets réels* A, A', B, B' et *deux sommets imaginaires,* ayant pour coordonnées

$$y=0,\quad z=0,\quad x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=\pm a;$$

$$z=0,\quad x=0,\quad y=\pm\sqrt{\frac{H}{P'}}=\pm b;$$

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\pm\sqrt{\frac{H}{P''}}=\pm c\sqrt{-1}.$$

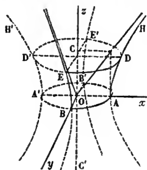
2°. L'équation (A) peut être réduite à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (2)$$

3°. Les sections principales sont l'ellipse et les hyperboles représentées par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

96. *Génération de la surface.* — Elle ne diffère de celle de l'ellipsoïde que par le changement de l'ellipse ACA'C' (92) en une *hyperbole directrice* AHA'H'. La surface est donc *indéfinie* et *continue :* on lui donne le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.



97. *Sections par des plans quelconques.* — Changeant P'' en — P'', on obtient (93)

$$B^2-4AC=-4(PP'-PP''n^2-P'P''m^2).$$

Cette quantité peut être *négative, nulle* et *positive ;* donc les sections planes de la surface peuvent être des *ellipses*, des *paraboles* et des *hyperboles*.

98. *Hyperboloïde de révolution.* — Si $b=a$, l'équation (2) représente un *hyperboloïde de révolution à une nappe*, engendré par la demi-hyperbole CAH tournant autour de son axe non transverse.

Hyperboloïde à deux nappes.

99. *Axes, sommets, etc.* — Supposons P positif, P' et P'' négatifs; l'équation (A) deviendra

$$Px^2-P'y^2-P''z^2=H,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (3)$$

1°. La surface a seulement *deux sommets réels* A, A', dont les coordonnées sont

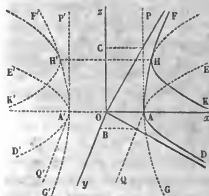
$$y=0, \quad z=0, \quad x=\pm a.$$

2°. Les traces de la surface, sur les plans xOy, xOz, sont les deux hyperboles ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

3°. Non-seulement le plan des yz ne coupe pas la surface, mais encore on n'obtient aucune section en donnant à x une valeur comprise entre $+a$ et $-a$. La surface est donc composée de deux

nappes séparées FAD, F'A'D' : l'une est située à la droite du plan PAQ représenté par $x = a$, l'autre s'étend à la gauche du plan P'A'Q', symétrique du premier relativement à l'origine. Comme d'ailleurs cette surface admet des sections hyperboliques, elle est convenablement désignée sous le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.



100. *Génération de la surface.* — En faisant $z = \gamma$ dans l'équation (3), on obtient

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2},$$

équation d'une hyperbole HKH'K' *semblable* à l'hyperbole principale ADA'D', et dont les sommets H, H' sont situés sur la seconde hyperbole principale AFG... On passe donc du premier hyperboloïde au second, en changeant l'*ellipse génératrice* en une hyperbole.

101. *Hyperboloïde de révolution.* — Lorsque $b = c$, l'équation (3) devient

$$y^2 + z^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

et l'on a un *hyperboloïde de révolution* autour de Ox. Si l'on veut conserver le mode de génération indiqué tout à l'heure, on doit prendre *l'hyperbole génératrice semblable à l'hyperbole directrice.*

102. *Remarque.* — On passe de l'équation (2) à l'équation (3), en changeant c en $c\sqrt{-1}$.

Cônes du deuxième degré.

103. Lorsque, dans l'équation (A), $H = 0$, et qu'en même temps les coefficients P, P', P'' sont différents de zéro, cette équation se réduit évidemment à l'une des deux formes suivantes :

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0, \quad (4) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0. \quad (5)$$

1°. L'équation (4) se décompose en $x=0$, $y=0$, $z=0$. Elle représente donc *l'origine*.

2°. Dans l'équation (5), faisons $x=mz$, $y=nz$; nous obtiendrons, en supposant que z ne soit pas nul,

$$Pm^2+P'n^2-P''=0.$$

Par conséquent, la surface représentée par l'équation (5) est le lieu d'une droite qui passe par l'origine, et dont les *paramètres* m, n satisfont à la condition précédente. Cette surface est donc *un cône ayant pour centre l'origine* (*).

104. *Remarques.* — I. *Un point est une variété de l'ellipsoïde:* c'est un ellipsoïde dont les trois axes sont nuls (*D. D.*, 119, 211).

II. *Un cône du deuxième degré peut*, indifféremment, *être regardé comme une variété de l'hyperboloïde à une nappe, ou comme une variété de l'hyperboloïde à deux nappes:* c'est un hyperboloïde dans lequel les trois axes ont diminué jusqu'à zéro, en conservant des rapports constants (**).

Cylindre elliptique ou hyperbolique.

105. Dans l'équation (A), supposons toujours H positif, et annulons un ou deux des coefficients P, P', P''; nous obtiendrons les résultats suivants, qu'il suffit d'énoncer :

(*) Généralement, *toute équation homogène entre trois coordonnées rectilignes représente l'origine ou un cône ayant l'origine pour centre.*

(**) Si l'on prend, par exemple, l'équation de l'hyperboloïde à une nappe,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

qu'on y fasse $\frac{a}{c}=m$, $\frac{b}{c}=n$, elle se réduira, lorsque $c=0$, à

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}-z^2=0.$$

Dans cette équation du cône, on peut, *pour la symétrie*, remettre $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ au lieu de m et de n, et l'on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

etc.

1°. $Px^2 + P'y^2 = H$: *cylindre droit, à base elliptique ;*
2°. $Px^2 - P'y^2 = H$: *cylindre droit, à base hyperbolique ;*
3°. $Px^2 = H$: *deux plans parallèles ;*
4°. $-P'y^2 = H$: *lieu imaginaire.*

106. De même, les équations (4) ou (5) donnent lieu aux variétés suivantes :
1°. $Px^2 + P'y^2 = 0$: *une droite ;*
2°. $Px^2 - P''z^2 = 0$: *deux plans qui se coupent ;*
3°. $Px^2 = 0$: *deux plans confondus en un seul.*

Cône asymptotique d'un hyperboloïde.

107. Prenons d'abord les équations

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H, \quad (1) \qquad Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0 \quad (2)$$

qui représentent, respectivement, un hyperboloïde à une nappe et un cône (95, 102), et comparons les ordonnées des points qui ont même projection sur le plan des xy. En les supposant positives pour plus de simplicité, et en les représentant par z_1 et z_2, nous aurons :

$$1°. \quad z_1\sqrt{P''} = \sqrt{Px^2 + P'y^2 - H}, \quad z_2\sqrt{P''} = \sqrt{Px^2 + P'y^2};$$

donc $z_1 < z_2$: *l'hyperboloïde* (1) *est extérieur au cône* (2).

$$2°. \quad (z_2 - z_1)\sqrt{P''} = \sqrt{Px^2 + P'y^2} - \sqrt{Px^2 + P'y^2 - H}$$
$$= \frac{H}{\sqrt{Px^2 + P'y^2} + \sqrt{Px^2 + P'y^2 - H}}.$$

Lorsque x et y augmentent indéfiniment, ou même lorsqu'une seule de ces variables croît au delà de toute limite, la fraction décroît indéfiniment. Il résulte de là que les deux surfaces tendent sans cesse à se rapprocher l'une de l'autre : pour cette raison, le cône est dit *asymptotique* à l'hyperboloïde.

108. La même discussion, appliquée aux équations

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H, \quad (3) \qquad Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 0, \quad (4)$$

montre que *l'hyperboloïde à deux nappes est intérieur à son cône asymptotique.*

EXERCICES.

I. *Théorème.* — 1° Les sections faites dans une surface du second ordre, par des plans parallèles, sont des courbes semblables et semblablement placées; 2° le lieu des centres de ces sections est un diamètre de la surface.

II. *Théorème.* — 1° Les sections faites par un même plan, dans un hyperboloïde et dans le cône asymptotique, sont deux courbes semblables et semblablement placées; 2° si ces sections sont des ellipses ou des hyperboles, elles sont concentriques.

III. *Théorème.* — Le cône asymptotique d'un hyperboloïde est le lieu des asymptotes des hyperboles que l'on obtient en coupant l'hyperboloïde par des plans passant en son centre.

IV. *Théorème.* — Toute surface à centre (non de révolution) admet deux séries de sections circulaires (*).

V. *Théorème.* — La courbe résultant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles, est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes, respectivement multipliées par des constantes, est une constante. Cette courbe, ainsi que les *ovales de Descartes*, admet un troisième foyer (**). (*Théorème de M. Chasles.*)

VI. Par le centre d'un ellipsoïde, on fait passer des plans qui déterminent des ellipses d'aire constante : quel est le lieu des perpendiculaires à ces plans, menées par le centre?

Réponse : Un cône du deuxième degré, dont les axes principaux coïncident, en direction, avec ceux de l'ellipsoïde.

VII. Trouver le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde, par des plans passant en son centre.

VIII. Étant donnés un cône du second ordre et un point dans son intérieur, mener un plan tel, que la section ait pour foyer le point donné.

(*) Ce théorème a été démontré pour le cône oblique, à base circulaire. (*D. D.*, **362**.)

(**) Les deux premiers foyers sont les sommets des cônes donnés.

CHAPITRE IX.

DISCUSSION DES SURFACES DÉPOURVUES DE CENTRE.

109. Ces surfaces sont représentées (83) par l'équation

$$P'y^2 + P''z^2 + 2Qx = 0, \quad (B)$$

dans laquelle le coefficient de x est différent de zéro. Les axes étant supposés rectangulaires, il résulte, de l'inspection de cette équation, que *les plans* zx *et* xy *sont les seuls plans principaux de la surface* (*).

110. Sans rendre la discussion moins générale, on peut admettre que le coefficient Q est négatif : s'il était positif, on changerait x en $-x'$ (*D. D.*, 315). De même, on peut exclure le cas où les coefficients P, P' seraient tous deux négatifs. Cela posé, l'équation (B) aura nécessairement une des trois formes suivantes :

$$Py^2 + P'z^2 = 2Qx, \quad Py^2 - P'z^2 = 2Qx, \quad Py^2 = 2Qx.$$

Paraboloïde elliptique.

111. *Sections principales, axe, sommet, etc.* — Cette surface, représentée par l'équation

$$Py^2 + P'z^2 = 2Qx, \quad (1)$$

s'étend indéfiniment à la droite du plan des yz ; elle a pour *traces*, sur les deux *plans principaux* xOy, xOz, les *paraboles principales* AOA', BOB', respectivement représentées par

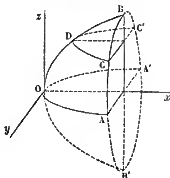
$$y^2 = \frac{2Qx}{P}, \quad z^2 = \frac{2Qx}{P'}.$$

(*) L'équation qui donne les directions des *droites principales* est

$$s^3 - (P' + P'')s^2 + P'P''s = 0.$$

Elle admet pour racines P', P'' et *zéro*. Les droites principales répondant à cette valeur nulle de s sont parallèles à l'axe des x (77) ; mais, comme chacune d'elles rencontre la surface en un seul point, elles ne déterminent pas de cordes ; etc.

Si l'on représente par $2p$ et $2p'$ les paramètres de ces *sections principales*, on pourra écrire ainsi l'équation (1) :



$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x. \quad (2)$$

L'intersection Ox des deux plans principaux est *l'axe du paraboloïde :* le point O, où il perce la surface, en est le *sommet*.

112. *Sections parallèles aux plans coordonnés.* — A l'inspection de l'équation (2), on reconnaît que : 1° *les sections parallèles au plan principal xOy sont des paraboles* CDC' *égales à la section principale* AOA'; 2° *les sections parallèles au plan principal xOz sont des paraboles égales à la section principale* BOB'; 3° *les sections perpendiculaires à l'axe sont des ellipses semblables, dont les sommets sont situés sur les paraboles principales.*

113. *Sections par des plans quelconques.* — Soit $z = mx + ny + q$ l'équation du plan sécant. Éliminant z, on trouve

$$(P + P'n^2)y^2 + 2P'mnxy + P'm^2 + \ldots = 0.$$

Le binôme caractéristique se réduit à $-PP'm^2$, quantité essentiellement négative, à moins que m ne soit nul. Par conséquent : 1° *les sections non parallèles à l'axe sont des ellipses ;* 2° *les sections parallèles à l'axe sont des paraboles.* De là, le nom de *paraboloïde elliptique.*

114. *Génération de la surface.* — Les sections perpendiculaires à l'axe étant des ellipses semblables (112, 3°), on pourrait adopter un mode de génération analogue à celui des surfaces à centre (92, 96, 100) ; mais il est bien plus simple de *faire mouvoir l'une des deux paraboles principales parallèlement à elle-même, de manière que son sommet parcoure l'autre parabole principale* (112, 1°). Cette génération remarquable accuse nettement la forme de la surface.

115. *Paraboloïde de révolution.* — Lorsque $p' = p$, l'équation (4) devenant

$$y^2 + z^2 = 2px,$$

elle représente une surface de révolution autour de l'axe Ox, à section méridienne parabolique.

Paraboloïde hyperbolique.

116. *Sections principales, etc.* — L'équation

$$Py^2 - P'z^2 = 2Qx, \quad (3)$$

qui représente cette surface, peut être remplacée par

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x, \quad (4)$$

$2p$ et $2p'$ étant les paramètres des deux *paraboles principales* AOA', BOB'. Contrairement à ce qui a lieu dans le paraboloïde elliptique, ces deux paraboles ont leurs axes Ox, Ox' dirigés en sens contraires; d'où il résulte que la nouvelle surface s'étend de part et d'autre du plan yOz. L'*axe* xOx', intersection des deux plans principaux, rencontre encore la surface en son *sommet* O.

117. *Sections parallèles aux plans coordonnés.* — Les sections parallèles aux plans principaux sont, comme dans le cas du paraboloïde elliptique, égales aux paraboles principales; mais *les sections perpendiculaires à l'axe sont des hyperboles semblables, dont les sommets réels sont situés sur l'une ou sur l'autre des paraboles principales.*

En effet: 1° ces sections sont représentées par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2\alpha, \quad (5)$$

dans laquelle les coefficients p, p' sont constants; 2° suivant que la quantité α est positive ou négative, les sommets réels de l'hyperbole ont pour coördonnées

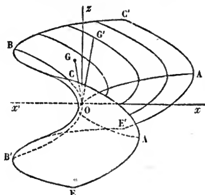
$$x = 0, \quad z = 0, \quad y = \pm\sqrt{2p\alpha},$$

ou

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm\sqrt{-2p'\alpha}.$$

118. Lorsque $\alpha = 0$, l'équation (5) donne $\frac{y}{z} = \pm\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Par conséquent, le plan des yz coupe la surface suivant deux droites OG, OG', symétriques par rapport à Oz et par rapport à Oy.

119. *Remarque.* — Les asymptotes de toutes les sections parallèles au plan yOz se projettent suivant les droites OG, OG′ (*).



120. *Sections par des plans quelconques.* — En changeant P′ en — P′ dans le calcul du n° 113, on trouve que: 1° *les sections non parallèles à l'axe sont des hyperboles;* 2° *les sections parallèles à l'axe sont des paraboles* (**). La surface est donc convenablement appelée *paraboloïde hyperbolique.*

121. *Génération de la surface.* — Elle est toute semblable à celle du paraboloïde elliptique (114). Néanmoins, ces deux surfaces sont de natures complétement différentes. Si l'on veut, sans un *modèle en relief,* se rendre compte de la forme du paraboloïde hyperbolique, on remarquera que : 1° tous les points de cette surface se projettent, sur les plans des xy et des xz, *extérieurement* aux paraboles principales; 2° le contour de la surface, quand on la suppose limitée aux plans représentés par $y = \pm b$, $z = \pm c$, se compose des *quatre arcs paraboliques* CAE, C′A′E′, CBC′, EB′E′, ayant leurs sommets en A, A′, B, B′, etc.

Cylindre parabolique.

122. Cette surface, représentée par l'équation

$$Py^2 = 2Qx,$$

peut être regardée comme un cas particulier de chacun des deux paraboloïdes (110). Elle a un seul *plan principal,* qui est celui des zx.

(*) De là résulte que les plans GOx, $G'Ox$ peuvent, *jusqu'à un certain point,* être considérés comme étant *asymptotiques.* Il ne faut pas oublier, cependant, qu'*ils coupent le paraboloïde* et que, dans la direction xOx', *ils s'en éloignent indéfiniment.*

(**) Sous-entendu : *ou des variétés de ces courbes.*

Résumé des deux derniers chapitres.

123. Une équation du deuxième degré, entre des coordonnées rectilignes, peut représenter *cinq genres* principaux de surfaces :

1ᵉʳ GENRE. *Ellipsoïde.* — Variétés : *point, lieu imaginaire, cylindre elliptique, droite, deux plans parallèles, deux plans confondus en un seul.*

2ᵉ GENRE. *Hyperboloïde à une nappe.* — Variétés : *Cône, cylindre hyperbolique, deux plans non parallèles.*

3ᵉ GENRE. *Hyperboloïde à deux nappes.*

4ᵉ GENRE. *Paraboloïde elliptique.* — Variété : *cylindre parabolique.*

5ᵉ GENRE. *Paraboloïde hyperbolique* (*).

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Le paraboloïde elliptique (non de révolution) admet deux séries de sections circulaires.

II. *Théorème.* — 1°. Le paraboloïde elliptique peut être regardé comme la limite d'une série d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes à deux nappes, dans lesquels deux sections principales auraient même sommet et même foyer. 2°. Le paraboloïde hyperbolique peut être regardé comme la limite d'une série d'hyperboloïdes à une nappe dans lesquels deux sections principales auraient même sommet et même foyer (*D. D.*, 319, 320).

III. *Théorème.* — Les droites qui rencontrent en un seul point la surface d'un paraboloïde sont parallèles à l'axe.

(*) Pour éviter un double emploi, nous n'avons cité qu'une seule fois les *variétés* qui appartiennent à plus d'un genre principal.

CHAPITRE X.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Hyperboloïde à une nappe.

124. Théorème I. — *L'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

Reprenons l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \quad (1)$$

En la mettant sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2};$$

ou, ce qui est équivalent, sous celle-ci :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

on voit qu'elle est une conséquence des équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

ou des équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right);\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

λ et μ étant des *paramètres* arbitraires. D'ailleurs, les équations (A), étant du premier degré, représentent une infinité de droites; et il en est de même des équations (B); donc, etc.

125. Remarque. — *Les deux systèmes de génératrices sont es-*

sentiellement différents; c'est-à-dire que *les équations* (A) et (B) *ne peuvent représenter une même droite.* En effet, l'élimination de x et de z, entre les équations (A) et la première des équations (B), donne

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

équation *non identique,* quels que soient λ et μ; donc les *trois* plans représentés par ces équations ne se coupent pas suivant une même droite; et il en est de même, à plus forte raison, pour les *quatre* plans (A), (B).

126. Théorème II. — *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Considérons, par exemple, avec la génératrice (A), une autre génératrice appartenant au même système que celle-ci. La seconde droite pourra être représentée par

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\lambda'\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\lambda'}\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\}\quad (A')$$

pourvu que λ' soit différent de λ. Or, l'élimination des inconnues x, z, entre les équations (A), (A'), conduit aux deux équations incompatibles

$$1+\frac{y}{b}=0,\quad 1-\frac{y}{b}=0.$$

127. Théorème III. — *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

Le calcul précédent, appliqué aux équations (A) et (B), donne

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$
$$\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

équations qui rentrent l'une dans l'autre.

128. Remarques. — I. *Si* $\mu=-\lambda$, *les génératrices* (A) *et* (B) *sont parallèles.*

II. *Les génératrices des deux systèmes sont respectivement parallèles.*

129. Théorème IV. — *Par chaque point de l'hyperboloïde passent deux génératrices rectilignes.*

En effet, pour tout système de valeurs de x, y, z vérifiant l'équation (1), les équations (A) donneront une même valeur de λ, et les équations (B) une même valeur de μ.

130. Remarque. — *Par un point quelconque* M, *il ne passe que deux génératrices rectilignes* MA, MB.

Soit, s'il est possible, MC une troisième génératrice passant en M. Par différents points de cette droite, menons des génératrices du système (B) : elles rencontreront MA (127), et, par conséquent, elles seront dans le plan CAM ; ce qui est impossible (126).

131. Théorème V. — *Les projections des génératrices, sur les plans des sections principales, sont tangentes à ces courbes.*

Considérons, par exemple, la section principale elliptique représentée par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (2)$$

Les équations d'une génératrice du système (A) étant

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

la projection de cette droite, sur le plan de l'ellipse, sera représentée par

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}. \quad (3)$$

Les lignes (2) et (3) se toucheront, si l'élimination de x conduit à une équation dont les racines soient égales. Or, cette équation est

$$\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)^2\frac{y^2}{b^2}+2\left(\lambda^2-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{y}{b}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)=0,$$

ou

$$\left[\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{y}{b}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^2=0;$$

donc, etc.

132. Théorème VI. — *Les génératrices de l'hyperboloïde sont parallèles aux génératrices du cône asymptotique.*

Le cône ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

une quelconque de ses génératrices peut être représentée par

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0\frac{y}{b},\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{0}\frac{y}{b}:$$

elle est donc parallèle, en même temps, à deux génératrices de l'hyperboloïde.

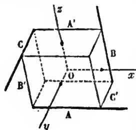
133. Corollaires. — I. *Trois génératrices d'un même système ne sont jamais parallèles à un même plan.*

En effet, ces trois droites sont respectivement parallèles à trois génératrices *distinctes* du cône asymptotique, et celles-ci ne sont pas dans un même plan.

II. *L'hyperboloïde à une nappe peut être engendré par une droite* G *qui s'appuierait sur trois génératrices* A, A′, A″ *d'un même système, prises comme directrices.*

En général, le mouvement d'une droite assujettie à rencontrer trois *directrices*, rectilignes ou curvilignes, est complétement déterminé. Par conséquent, la droite mobile G coïncidera, successivement, avec les génératrices B, B′, B″,..., du second système. Donc elle engendrera l'hyperboloïde.

134. Théorème VII. — *Lorsqu'une droite mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes* A, B, C, *non parallèles à un même plan et telles, en outre, que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan, la surface ainsi engendrée est un hyperboloïde à une nappe* (*).



Par chacune des directrices A, B, C, faisons passer deux plans, respectivement parallèles aux deux autres droites : nous obtiendrons ainsi un parallélipipède dont A, B, C seront trois arêtes. Si nous prenons pour origine le centre du parallélipipède, et pour axes, des parallèles aux arêtes, les équations des directrices seront

$$\text{A}\left\{\begin{array}{l} y=b,\\ z=-c;\end{array}\right.\qquad \text{B}\left\{\begin{array}{l} x=a,\\ y=-b;\end{array}\right.\qquad \text{C}\left\{\begin{array}{l} z=c,\\ x=-a.\end{array}\right.$$

(*) Cette proposition est la réciproque du corollaire précédent.

Quant à la génératrice, elle peut être commodément représentée par

$$y-b+\lambda(z+c)=0, \quad y+b+\mu(x-a)=0;$$

car ces équations appartiennent à toutes les droites qui rencontrent A et B (36). En exprimant que cette génératrice s'appuie sur (C), nous obtenons

$$-b+\lambda c+\mu a=0;$$

d'où enfin $\qquad ayz+bzx+cxy+abc=0. \quad (4)$

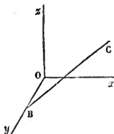
Cette équation représente une surface du second ordre, qui a pour centre *unique* l'origine, et qui admet des génératrices rectilignes, tandis que l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à deux nappes n'en admettent évidemment pas; cette surface est donc un hyperboloïde à une nappe.

135. *Remarque.* — Le calcul précédent met en évidence le second mode de génération de l'hyperboloïde. En effet, si l'on remplace les arêtes A, B, C par A', B', C', les équations de ces nouvelles directrices seront

$$A'\begin{cases} y=-b, \\ z=c; \end{cases} \quad B'\begin{cases} x=-a, \\ y=b; \end{cases} \quad C'\begin{cases} z=-c, \\ x=a; \end{cases}$$

d'où il résulte que, pour obtenir la nouvelle équation, il suffirait de changer, dans l'équation (4), a, b, c, en $-a$, $-b$, $-c$: la *seconde surface coïncide* donc *avec la première*. De plus, *les nouvelles directrices sont des positions particulières de la première génératrice;* car A', par exemple, est parallèle à A et rencontre B et C.

136. Théorème VIII. — *La surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un axe fixe, non situé dans un même plan avec elle, est un hyperboloïde de révolution à une nappe.*



Prenons la droite fixe pour axe des z, et, considérant la droite mobile dans une position particulière BC, adoptons pour axe des y *la plus courte distance* OB des deux droites. Les coordonnées étant rectangulaires, la droite BC pourra être représentée

par

$$y = b, \quad \frac{z}{x} = \tang \alpha. \quad (5)$$

Cela posé, changeons le mode de génération donné; et, considérant BC comme une *directrice*, prenons pour génératrice un *parallèle* quelconque de la surface de révolution. Les équations de ce parallèle seront évidemment

$$x^2 + y^2 = \lambda^2, \quad z = \mu, \quad (6)$$

λ et μ étant deux paramètres. L'élimination de x, y, z entre les équations (5), (6) donne *l'équation de condition*

$$\mu^2 \cot^2 \alpha + b^2 = \lambda^2;$$

d'où

$$x^2 + y^2 - z^2 \cot^2 \alpha = b^2,$$

équation d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Paraboloïde hyperbolique.

137. Théorème IX. — *Le paraboloïde hyperbolique admet deux systèmes de génératrices rectilignes.*

L'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x \quad (1)$$

pouvant être obtenue, soit par l'élimination du paramètre λ entre les deux équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 2\lambda x, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda}, \quad (A)$$

soit par l'élimination du paramètre μ entre

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu, \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{2x}{\mu}, \quad (B)$$

la proposition est démontrée (124).

138. Remarque. — *Les deux systèmes de génératrices sont essentiellement différents.*

En effet, l'élimination de y et de z, entre les équations (A) et la première des équations (B) donne l'équation *déterminée*

$$2\lambda x = \mu;$$

donc, etc. (125).

139. Théorème X. — *Les génératrices d'un même système sont parallèles à un même plan.*

En effet, l'équation $\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = \frac{1}{\lambda}$

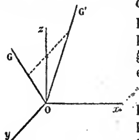
représente une série de plans parallèles entre eux; et il en est de même pour l'équation

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = \mu.$$

140. *Remarques.* — I. Les équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} = 0$$

représentent les deux *plans directeurs* du paraboloïde, c'est-à-dire les plans auxquels les génératrices sont parallèles. Ces plans GOx, $G'Ox$ passent par *l'axe* Ox du paraboloïde et par les deux génératrices OG, GO' situées dans le plan des yz (118).



II. Les génératrices du système (A) se projettent, sur ce dernier plan, suivant des parallèles à OG; et les autres génératrices, suivant des parallèles à OG'.

141. Théorème XI. — *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Cette proposition, qui résulte de la seconde remarque, peut aussi se démontrer par le calcul suivant :

Soient

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} &= 2\lambda x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} &= \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}\right\} \text{(A)} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p'}} &= 2\lambda' x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{p'}} &= \frac{1}{\lambda'}, \end{aligned}\right\} \text{(A')}$$

les équations de deux génératrices d'un même système. L'élimination de y et de z conduit à la relation

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'},$$

qui ne saurait avoir lieu si A et A' sont deux droites différentes.

142. Théorème XII. — *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

En effet, l'élimination de x, y, z, entre les équations (A) et (B) (137), conduit à l'identité

$$\frac{\mu}{2\lambda} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\mu}}.$$

143. Remarque. — *Le paraboloïde hyperbolique n'admet pas de génératrices parallèles.*

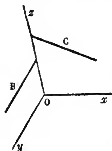
144. Théorème XIII. — *Par chaque point du paraboloïde passent deux génératrices rectilignes* (129).

145. Remarque. — *Par un point quelconque du paraboloïde, il ne passe que deux génératrices rectilignes* (130).

146. Théorème XIV. — *Les projections des génératrices, sur les plans des sections principales, sont tangentes à ces courbes* (131).

147. Corollaire. — *Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une droite* G *qui s'appuierait sur trois génératrices d'un même système, prises comme directrices* (133, II).

148. Théorème XV. — *Lorsqu'une droite mobile s'appuie constamment sur trois droites fixes* A, B, C, *parallèles à un même plan et telles, en outre, que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan, la surface ainsi engendrée est un paraboloïde hyperbolique.*



Prenons, pour axe des x, la droite A; pour axe des z, une position particulière de la génératrice; et, pour axe des y, une parallèle à B. Les équations des trois directrices seront

$$(\text{A}) \left\{ \begin{array}{l} y = 0, \\ z = 0; \end{array} \right. \qquad (\text{B}) \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ z = c; \end{array} \right. \qquad (\text{C}) \left\{ \begin{array}{l} y = ax, \\ z = c'. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, la génératrice peut être représentée par

$$y = \lambda z, \quad x = \mu(z - c);$$

et, pour qu'elle rencontre C, les paramètres λ, μ doivent satis-

faire à la condition

$$\lambda c' = a\mu(c' - c).$$

Par suite, la surface engendrée a pour équation

$$c'y(z - c) - a(c' - c)xz = 0.$$

Comme les équations du centre

$$z = 0, \quad z - c = 0, \quad c'y - a(c' - c)x = 0$$

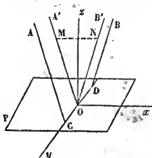
sont incompatibles, et que d'ailleurs la surface est engendrée par une droite, elle est nécessairement un paraboloïde hyperbolique.

149. *Remarque.* — Les génératrices du système auquel appartiennent A, B, C sont représentées par

$$z = \gamma, \quad c'y(\gamma - c) - a(c' - c)\gamma x = 0.$$

150. Théorème XVI. — *Lorsqu'une droite s'appuie sur deux droites fixes* A, B *non situées dans un même plan, en restant parallèle à un plan donné* P, *elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Nous prendrons pour axe des y la droite qui joint les *traces* C, D des directrices sur le *plan directeur* P; pour origine, le milieu O de CD; pour axe des x, l'intersection du plan P avec le plan A'OB', parallèle aux directrices. Enfin, OA', OB' étant des parallèles à ces droites, nous choisirons, pour axe des z, le *diamètre* des cordes MN parallèles à Ox. De cette manière, les équations des directrices sont



$$(A) \begin{cases} y = b, \\ x = az; \end{cases} \qquad (B) \begin{cases} y = -b, \\ x = -az. \end{cases}$$

La génératrice, étant parallèle au plan des xy, sera représentée par

$$z = \gamma, \quad x = \alpha y + \beta.$$

Pour qu'elle rencontre les deux directrices, les trois paramètres α, β, γ doivent satisfaire aux conditions

$$a\gamma = b\alpha + \beta, \quad -a\gamma = -b\alpha + \beta;$$

ou plutôt à ces deux-ci :

$$\beta = 0\ (*),\quad a\gamma = bx.$$

On en conclut, pour l'équation de la surface,

$$ayz - bx = 0;$$

etc.

EXERCICES.

I. Lieu des points également distants de deux droites non situées dans un même plan (*paraboloïde hyperbolique*).

II. Lieu des points également distants d'une droite et d'un plan qui se coupent (*cône du second degré*).

III. Lieu décrit par l'arête d'un angle dièdre droit, dont les faces passent respectivement par deux droites données, non situées dans un même plan (*hyperboloïde à une nappe*).

IV. *Théorème.* — Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent, si la *courbe d'entrée* est plane, la *courbe de sortie* l'est pareillement.

V. *Théorème.* — Lorsque deux surfaces du second ordre ont un plan principal commun, leur intersection se projette, sur ce plan principal, suivant une conique.

VI. Lieu des points tels, que la distance de chacun d'eux à un point quelconque d'une ellipse donnée soit une fonction rationnelle et du premier degré des coordonnées rectilignes de ce dernier point (*une hyperbole située dans un plan perpendiculaire à celui de l'ellipse, ayant pour sommets les foyers de l'ellipse, et réciproquement*).

VII. *Théorème.* — Si une ellipse et une hyperbole, situées dans deux plans perpendiculaires entre eux, sont telles, que les sommets de l'une des courbes soient les foyers de l'autre, tout cône ayant pour base l'ellipse et pour sommet un point de l'hyperbole est un cône de révolution.

VIII. *Théorème.* — Par le sommet de tout cône du deuxième degré passent deux droites faisant, avec une génératrice quelconque, deux angles dont la somme est constante.

(*) Cette valeur de β apprend que *la génératrice rencontre, à chaque instant, l'axe* O*z*. Des considérations géométriques fort simples peuvent servir à démontrer la même propriété.

IX. *Théorème.* — Les cordonnées étant supposées rectangulaires, les deux équations

$$\begin{aligned}&[(b'c''-b''c')x+(c'a''-c''a')y+(a'b''-a''b')z]^2\\+&[(b''c-bc'')x+(c''a-ca'')y+(a''b-ab'')z]^2\\+&[(bc'-b'c)x+(ca'-c'a)y+(ab'-a'b)z]^2=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[(b'c''-b''c')x+(b''c-bc'')y+(bc'-b'c)z]^2\\+&[(c'a''-c''a')x+(c''a-ca'')y+(c'a-ca')z]^2\\+&[(a'b''-a''b')x+(a''b-ab'')y+(a'b-ab')z]^2=1\end{aligned}$$

représentent deux ellipsoïdes égaux (*Théorème de Jacobi*).

CHAPITRE XI.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU SECOND DEGRÉ, A TROIS VARIABLES.

Préliminaires.

151. Pour déterminer la nature du lieu représenté par une équation numérique

$$\left.\begin{aligned}f(x,y,z)=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy\\+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

on commence par chercher s'il admet *un centre unique, une droite lieu des centres, un plan lieu des centres,* ou enfin s'il est *dépourvu de centre.* A cet effet, on formera les *équations du centre* (70):

$$\left.\begin{aligned}f'_x&=\mathrm{A}x+\mathrm{B}'z+\mathrm{B}''y+\mathrm{C}=0,\\f'_y&=\mathrm{A}'y+\mathrm{B}''x+\mathrm{B}z+\mathrm{C}'=0,\\f'_z&=\mathrm{A}''z+\mathrm{B}y+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}''=0;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

et, en cherchant à les résoudre, on saura quel est celui des quatre cas auquel se rapporte l'équation proposée (71).

Premier cas : un centre unique.

152. En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière à prendre le centre pour nouvelle origine, on réduit (70) l'équation (1) à l'une des deux formes

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0, \quad (3)$$

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H. \quad (4)$$

Or (103) : 1°. L'équation (3) représente un *cône* ou *l'origine ;*

2°. L'équation (4) peut représenter : un *ellipsoïde,* un *hyperboloïde à une nappe,* un *hyperboloïde à deux nappes,* ou un *lieu imaginaire.*

153. L'équation (3) représentera un *cône* si l'on peut mener, par l'origine, un plan qui rencontre le lieu suivant deux droites. En particulier, si les sections faites par les plans coordonnés ne se réduisent pas, toutes les trois, à l'origine, le lieu sera certainement un cône.

154. Quand l'équation (3) est vérifiée seulement par $x=0$, $y=0$, $z=0$, le lieu se réduit à *l'origine.* Il est facile de reconnaître que les conditions nécessaires pour que ce cas particulier se présente, sont :

$$B^2-A'A''<0, \quad B'^2-A''A<0, \quad B''^2-AA'<0,$$

$$AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2>0 \text{ (*)}.$$

155. Pour discuter l'équation (4), on peut toujours, préalablement, rendre H *positif* dans le second membre. Cela posé, il existe, entre les longueurs des axes principaux de la surface que cette équation représente, et les racines de l'équation *caractéristique* (77), une relation remarquable, exprimée par la proposition suivante.

156. Théorème. — *Les carrés des demi-axes principaux* (réels ou imaginaires) *de la surface* (4) *ont pour valeurs* $\frac{H}{s}, \frac{H}{s'}, \frac{H}{s''}$, s, s', s'' *étant les racines de l'équation caractéristique.*

Représentons par u la longueur d'un de ces demi-axes et par x, y, z les coordonnées du sommet, réel ou imaginaire, auquel il aboutit : ces quatre quantités sont déterminées (77) par les équa-

(*) On suppose $A>0$.

tions

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=u, \quad (\alpha)$$

$$\frac{Aa+B''b+B'c}{a}=\frac{A'b+Bc+B''a}{b}=\frac{A''c+B'a+Bb}{c}=s. \quad (\beta)$$

Or, l'élimination de x, y, z entre les équations (4) et (α) donne

$$u^2=\frac{H}{Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+B''ab},$$

et, d'un autre côté, les rapports égaux (β) donnent, à cause de $a^2+b^2+c^2=1$,

$$s=Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+B''ab;$$

donc, etc.

157. *Remarque.* — Toute surface à centre unique ayant au moins trois axes principaux, les valeurs de u^2 sont réelles et finies; donc il en est de même pour les valeurs de s; donc *l'équation caractéristique a ses trois racines réelles et différentes de zéro.* Ce résultat est conforme à ce que l'on a vu plusieurs fois.

158. Reprenons à présent la discussion de l'équation (4). L'application du théorème de Descartes (*Alg.*, 279) fera connaître le nombre des racines positives et le nombre des racines négatives de l'équation caractéristique; donc, d'après le théorème précédent:

L'équation (4) *représente un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes, ou un lieu imaginaire, suivant que le nombre des variations de l'équation caractéristique est trois, deux, un ou zéro.*

159. *Remarque.* — Le théorème ci-dessus (156) suppose les axes coordonnés rectangulaires; mais *la règle contenue dans la dernière proposition est applicable aux coordonnées obliques.* En effet, si l'on transforme la surface donnée S en une autre surface S', de manière qu'à tout point M de la première, ayant pour coordonnées *obliques* x, y, z, corresponde, sur S', un point M' dont les coordonnées *rectangulaires* x', y', z' soient respectivement égales à x, y, z, cette seconde surface, évidemment de *même espèce* que la première, sera représentée par l'équation (4), dans laquelle on changerait seulement x, y, z en x', y', z'. L'espèce de la surface S sera donc déterminée par la règle précédente.

Deuxième cas : une droite lieu des centres.

160. On peut encore (mais cela n'est pas indispensable) ramener l'équation (1) à l'une des deux formes (3), (4), en prenant *un des centres* pour nouvelle origine. Cela posé :

1°. L'équation (3) peut représenter *une droite* ou *deux plans non parallèles ;*

2°. L'équation (4) peut représenter *un cylindre elliptique, un cylindre hyperbolique* ou *un lieu imaginaire.* On détermine l'espèce du lieu en considérant les sections faites par les plans coordonnés.

161. *Remarque.* — Quand l'équation (1) représente une droite, cette ligne est le lieu des centres; par conséquent, *l'équation* (1) *équivaut au système des équations* $f'_x = 0$, $f'_y = 0$. En même temps *le premier membre de cette équation est, d'une infinité de manières, décomposable en la somme de deux carrés* (*D. D.*, **124**, IV).

Troisième cas : un plan lieu des centres.

162. Dans ce cas, l'équation (1) représente en général *deux plans parallèles,* symétriquement placés par rapport au *lieu des centres,* et dont les variétés sont : *deux plans confondus en un seul,* ou un *lieu imaginaire* (73). Les sections faites par les plans coordonnés déterminent la nature du lieu.

163. *Remarque.* — Le premier membre de l'équation (1) est, *à un facteur près,* égal à $(f'_x)^2 - \lambda$, λ étant une quantité réelle.

Quatrième cas : aucun centre.

164. Lorsque les équations du centre sont incompatibles, la surface représentée par l'équation (1) est un *paraboloïde elliptique,* un *paraboloïde hyperbolique,* ou un *cylindre parabolique.*

Pour reconnaître auquel de ces trois genres appartient la surface, il suffit de former les binômes $B^2 - A'A''$, $B'^2 - A''A$, $B''^2 - AA'$: 1° *s'ils sont nuls tous trois, la surface est un cylindre ;* 2° *suivant qu'un de ces binômes* (au moins) *est négatif ou positif, la surface est un paraboloïde elliptique ou un paraboloïde hyperbolique.*

On justifie cette règle en observant que : 1° *dans un paraboloïde*

quelconque, les sections paraboliques sont parallèles à l'axe (113, 120); 2° *les trois plans coordonnés ne peuvent être parallèles à une même droite*; 3° *le paraboloïde elliptique n'admet aucune section hyperbolique; etc.* (113).

Complément de la discussion des surfaces à centre unique.

165. L'équation *caractéristique* fait bien connaître l'espèce de la surface représentée par une équation donnée, mais elle n'apprend rien quant à la *forme* de la surface, à sa *situation* relativement aux plans coordonnés, etc. Nous allons donc reprendre la discussion des surfaces à centre unique, en adoptant une marche analogue à celle que l'on suit pour les courbes du second ordre (*D. D.*, Chap. XI). Cette seconde méthode, qui complète la première, peut même en tenir lieu, car elle n'exige pas la formation de l'équation caractéristique.

166. Supposons, comme dans le n° 152, que l'équation proposée ait été ramenée à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H, \quad (1)$$

le second membre H étant *positif*. Si A″ n'est pas nul, les deux valeurs de z seront données par la formule

$$z = my + nx \pm \sqrt{ay^2 + bxy + cx^2 + f}, \quad (2)$$

dans laquelle

$$m = -\frac{B}{A''}, \quad n = -\frac{B'}{A''}, \quad a = \frac{B^2 - A'A''}{A''^2}, \text{ etc.}$$

En raisonnant comme dans le chapitre cité, on conclut que :

1°. $$z_1 = my + nx \quad (3)$$

représente un plan qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des z : c'est le *plan diamétral conjugué* à cet axe,

2°. $$Z = \sqrt{ay^2 + bxy + cx^2 + f} \quad (4)$$

est *l'ordonnée comptée à partir du plan diamétral;*

3°. La courbe suivant laquelle la surface est coupée par son plan diamétral est déterminée par les équations

$$z = my + nx, \quad (3) \qquad ay^2 + bxy + cx^2 + f = 0 : \quad (5)$$

cette dernière, qui représente un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z (*), représente aussi la projection de la courbe d'intersection, faite sur le plan des xy.

167. Remarquons à présent que la partie du plan des xy, sur laquelle se projettent les points de la surface satisfaisant à l'inégalité

$$ay^2+bxy+cx^2+f>0, \quad (6)$$

est séparée, du reste de ce plan, par la courbe (5), dont il vient d'être question (**). D'ailleurs l'équation (5) peut représenter *une ellipse, un lieu imaginaire,* ou *une hyperbole;* donc nous avons à examiner trois cas principaux.

168. Premier cas : *l'équation* (5) *représente une ellipse.* — Suivant que la surface se projette à *l'intérieur* ou à *l'extérieur* de cette courbe, elle est évidemment un *ellipsoïde* ou un *hyperboloïde à une nappe;* d'après l'inégalité (6), on a donc :

Pour $f>0$, *un ellipsoïde;*

Pour $f<0$, *un hyperboloïde à une nappe.*

169. Deuxième cas : *l'équation* (5) *représente un lieu imaginaire.* — Lorsqu'il en est ainsi, le premier membre de cette équation reste *toujours positif* ou *toujours négatif;* et, conséquemment, l'équation (1) représente un *hyperboloïde à deux nappes,* ou un *lieu imaginaire.* Donc

Pour $f>0$, *un hyperboloïde à deux nappes;*

Pour $f<0$, *un lieu imaginaire.*

170. Troisième cas : *l'équation* (5) *représente une hyperbole.* — Une discussion toute semblable à la précédente conduit à ce résultat :

Pour $f>0$, *un hyperboloïde à une nappe;*

Pour $f<0$, *un hyperboloïde à deux nappes.*

171. Nous avons supposé, dans ce qui précède, A″ différent de

(*) Ce cylindre est tangent à la surface, tout le long de la courbe dont il s'agit. (*Voyez* le *Traité de Géométrie descriptive.*)

(**) La courbe d'intersection de la surface et du plan diamétral est le *contour apparent* de la surface, relatif au plan des xy; la courbe (5) est donc la *projection du contour apparent.* (*Géométrie descriptive.*)

zéro. Si ce coefficient est nul, c'est-à-dire si le terme en z^2 manque, et qu'il en soit de même pour y^2 et pour z^2, l'équation (1) prend la forme

$$Byz + B'zx + B''xy = H. \quad (7)\ (*)$$

Dans cette nouvelle équation, les trois coefficients B, B′, B″ sont différents de zéro, sans quoi *la surface aurait une infinité de centres,* contrairement à l'hypothèse. Cette surface, évidemment indéfinie dans tous les sens, est donc un des deux hyperboloïdes. De plus, l'équation du *cône asymptotique* est

$$Byz + B'zx + B''xy = 0. \quad (8)\ (**)$$

172. On a vu, dans le Chapitre X, que les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe sont respectivement parallèles aux génératrices du cône asymptotique. Or le cône (8) admet, pour une de ses génératrices, l'axe des z. Conséquemment, *pour que la surface* (7) *soit un hyperboloïde à une nappe, il faut et il suffit qu'elle contienne une parallèle à l'axe des z;* ou, ce qui est équivalent, *il faut et il suffit que l'équation* (7) *soit rendue identique, par un système de valeurs réelles de x et de y.*

Cette condition donne

$$By + B'x = 0, \quad B''xy = H;$$

puis

$$x = \pm\sqrt{-\frac{HB}{B'B''}}, \quad y = \mp\sqrt{-\frac{B'H}{BB''}}.$$

H étant supposé positif, ces valeurs seront réelles si, parmi les coefficients B, B′, B″, il y en a *un nombre impair qui soit négatif,* ou, plus simplement, *si le produit* BB′B″ *est négatif.* Le cas que nous examinons se résume donc ainsi :

$BB'B'' < 0$, *hyperboloïde à une nappe;*

$BB'B'' > 0$, *hyperboloïde à deux nappes.*

(*) Pour plus de simplicité, on a supprimé le facteur 2.

(**) En effet: 1° l'équation (8) représente un cône concentrique avec la surface (7); 2° la différence des valeurs de z, représentée par

$$\frac{H}{By + B'x},$$

diminue indéfiniment quand x ou y augmente.

Recherche des génératrices rectilignes.

173. Hyperboloïde a une nappe. — Pour trouver les génératrices rectilignes d'une pareille surface, représentée par

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H, \quad (1)$$

essayons de mettre cette équation sous la forme

$$L^2 - M^2 + N^2 = 1, \quad (2)$$

L, M, N étant des polynômes du premier degré, contenant x, y, z: si cette transformation peut être effectuée, les génératrices d'un des systèmes seront déterminées (**124**) par les équations

$$L + M = \lambda(1 + N), \quad L - M = \frac{1}{\lambda}(1 - N), \quad (3)$$

et celles de l'autre système par les équations

$$L + M = \mu(1 - N), \quad L - M = \frac{1}{\mu}(1 - N). \quad (4)$$

174. En supposant A différent de zéro, et en groupant convenablement les termes qui contiennent x, nous pourrons écrire l'équation (1), d'abord sous cette forme :

$$(Ax + B'z + B''y)^2 - (B'z + B''y)^2 + AA'y^2 + AA''z^2 + 2AByz = AH,$$

puis sous celle-ci :

$$\begin{gathered}(Ax + B'z + B''y)^2 - (B''^2 - AA')y^2 \\ - 2(B'B'' - AB)yz - (B'^2 - AA'')z^2 = AH.\end{gathered}$$

Si le binôme $B''^2 - AA'$ n'est pas nul, nous pourrons encore remplacer la dernière équation par

$$\left.\begin{aligned}&(B''^2 - AA')(Ax + B'z + B''y)^2 \\ &- [(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z]^2 - A\Delta z^2 \\ &= AH(B''^2 - AA'),\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

en posant, comme dans le Chapitre V,

$$\Delta = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

et l'équation (5) sera celle que nous cherchions.

En effet, si l'on suppose l'hyperboloïde rapporté aux plans dont

les équations sont

$$Ax+B'z+B''y=0,\quad (B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z=0,\quad z=0\text{(*)},$$

les nouvelles coordonnées X, Y, Z *d'un point quelconque* (x, y, z) *seront égales aux premiers membres de ces équations, respectivement multipliés par des constantes réelles* α, β, γ (**); *de sorte que l'on aura, au lieu de l'équation* (5),

$$\frac{\alpha^2}{AH}X^2-\frac{\beta^2}{AH(B''^2-AA')}Y^2-\frac{\Delta\gamma^2}{B''^2-AA'}Z^2=1.$$

Or cette dernière équation, qui a la forme $Px^2+P'y^2+P''z^2=1$, représente, par hypothèse, un hyperboloïde à une nappe; donc deux des coefficients P, P′, P″ doivent être positifs, le troisième étant négatif.

Admettons, pour fixer les idées, que les quantités A, Δ et B''^2-AA' soient positives; alors, en comparant les équations (5) et (2), nous pourrons prendre

$$L^2=\frac{(Ax+B'z+B''y)^2}{AH},$$

$$M^2=\frac{[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z]^2}{AH(B''^2-AA')},$$

$$N^2=\frac{\Delta z^2}{H(B''^2-AA')}.$$

175. *Remarques.* — I. Lorsque les quantités A′, A″, $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$ sont différentes de zéro, l'équation (1) peut encore être réduite aux deux formes suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&(B^2-A'A'')(A'y+B''x+Bz)^2\\&-[(B^2-A'A'')z+(B''B-A'B')x]^2-A'\Delta x^2\\&=A'H(B^2-A'A''),\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&(B'^2-A''A)(A''z+By+B'x)^2\\&-[(B'^2-A''A)x+(BB'-A''B'')y]^2-A''\Delta y^2\\&=A''H(B'^2-A''A).\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

(*) Le troisième plan est évidemment celui des xy. Le deuxième est *le plan diamétral conjugué à l'axe des x* (76, II).

(**) Pour abréger, nous supprimons la démonstration, qui ne saurait embarrasser le lecteur.

II. Chacune des équations (5), (6), (7) **représente la surface** (1), rapportée à un *système de diamètres conjugués* (*).

III. Si la surface, au lieu d'être, comme on le suppose, un hyperboloïde à une nappe, est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes, les équations (5), (6), (7) auront la forme

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1$$

dans le premier cas, et la forme

$$L^2 - M^2 - N^2 = 1$$

dans le second.

IV. Conséquemment, la *décomposition* du premier membre de l'équation (1), *en une somme ou une différence de carrés*, constitue une *troisième méthode* de discussion des surfaces à centre (**).

176. Nous avons supposé, dans ce qui précède, les quantités A et $B''^2 - AA'$ différentes de zéro (***). Si ce binôme est nul sans que A le soit, le trinôme $Ax^2 + 2B''xy + A'y^2$ est un carré, et l'on peut écrire ainsi l'équation (1) :

$$Az(A''z + By + B'x) = AH - (Ax + B''y)^2. \quad (8)$$

Le produit AH est nécessairement positif, sans quoi le plan des xy, qui passe par le centre, ne couperait pas la surface, ce qui ne saurait avoir lieu, cette surface étant un hyperboloïde à une nappe. Le second membre de l'équation (8) est donc égal au produit des facteurs *réels* $\sqrt{AH} + (Ax + By)$, $\sqrt{AH} - (Ax + By)$; et, conséquemment, les génératrices de l'un des systèmes sont représentées par

$$\left.\begin{aligned} Az &= \lambda\left(\sqrt{AH} + Ax + By\right), \\ A''z + By + B'x &= \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{AH} - Ax - By\right), \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(*) Dans toute surface du second ordre, trois diamètres sont dits *conjugués*, quand chacun d'eux est parallèle aux cordes que le plan des deux autres divise en parties égales.

(**) Nous engageons le lecteur à étudier une très-savante Note de M. Hermite, insérée dans le *Programme* rédigé par MM. *Gerono* et *Roguet*.

(***) Plus généralement, au moins un des coefficients A, A', A'', différent de zéro, ainsi que le binôme correspondant.

et celles de l'autre système par

$$\left.\begin{aligned} Az &= \mu\left(\sqrt{AH} - Ax - By\right),\\ A''z + By + B'x &= \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{AH} + Ax + By\right). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

177. Lorsque l'équation (1) se réduit à

$$Byz + B'zx + B''xy = H, \quad (11)$$

deux des génératrices de l'hyperboloïde sont (172) représentées par

$$x = \pm\alpha = \pm\sqrt{-\frac{BH}{B'B''}}, \quad y = \pm\beta = \mp\frac{B'}{B}\alpha.$$

Faisons passer un plan par l'une de ces deux droites : il coupera de nouveau la surface suivant une seconde génératrice dont les équations sont, ainsi qu'on le voit aisément (**),

$$y - \beta = \lambda(x - \alpha), \quad Bz + B''x = -\frac{1}{\lambda}(B''\beta + B'z). \quad (12)$$

Ces deux équations déterminent donc un premier système de génératrices. Les génératrices du second système sont représentées par

$$y + \beta = \mu(x + \alpha), \quad Bz + B''x = -\frac{1}{\mu}(-B''\beta + B'z). \quad (13)$$

178. *Remarque.* — L'élimination de λ, entre les équations (12), conduit à

$$Byz + B'zx + B''xy - (B\beta + B'\alpha)z - B''\alpha\beta = 0:$$

en vertu des relations $B\beta + B'\alpha = 0$, $B''\alpha\beta = H$ (172), cette équation ne diffère pas de la proposée. Les équations (13) donnent lieu à une remarque analogue.

(*) Ce paragraphe est extrait d'une Note de M. *Gerono*, insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XV.

(**) En remplaçant y par $\beta + \lambda(x - \alpha)$ dans l'équation (11), on obtient

$$(Bz + B''x)[\beta + \lambda(x - \alpha)] + B'zx - H = 0.$$

Le premier membre doit être divisible par $x - \alpha$; donc l'équation

$$(Bz + B''x)\lambda + B''\beta + B'z = 0$$

représente la projection de la seconde génératrice sur le plan zx.

179. Paraboloïde hyperbolique. — Soit

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ \quad +2Cx+2C'y+2C''z+D=0 \end{array}\right\} \quad (14)$$

l'équation de cette surface : le déterminant Δ est égal à zéro (164). De plus, au moins un des binômes $B^2-A'A''$, $B'^2-A''A$, B''^2-AA' est positif (164). En supposant que ce soit B''^2-AA', on peut écrire ainsi l'équation (14) :

$$\left.\begin{array}{l} (B''^2-AA')(Ax+B'z+B''y)^2 \\ -[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z]^2 \\ +A(B''^2-AA')(2Cx+2C'y+2C''z+D)=0\,; \end{array}\right\} \quad (15)$$

pourvu que A soit différent de zéro. Cette hypothèse étant admise pour un instant, les génératrices du premier système seront représentées par les équations

$$\left.\begin{array}{l} Ax+B'z+B''y+\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =\lambda(2Cx+2C'y+2C''z+D), \\ Ax+B'z+B''y-\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =-\dfrac{A}{\lambda}; \end{array}\right\} \quad (16)$$

et celles du second système par les équations

$$\left.\begin{array}{l} Ax+B'z+B''y-\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =\mu(2Cx+2C'y+2C''z+D), \\ Ax+B'z+B''y+\dfrac{(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z}{\sqrt{B''^2-AA'}} \\ \qquad =-\dfrac{A}{\mu}. \end{array}\right\} \quad (17)$$

180. *Remarque.* — L'équation

$$(B''^2-AA')(Ax+B'z+B''y)^2-[(B''^2-AA')y+B'B''-AB)z]^2=0$$

représente les plans directeurs du paraboloïde (140) (*).

(*) Quoique ces deux plans ne passent pas nécessairement par le *sommet* de la surface (140), on peut leur conserver le nom de *plans directeurs*, parce que les génératrices rectilignes sont parallèles à l'un ou à l'autre.

181. Lorsque A est nul, l'équation (15) devient identique. Mais si l'on met d'abord l'équation (14) sous la forme

$$\begin{aligned}&(B''^2 - AA')(A'y + B'z + B''x)^2\\ &-[(B''^2 - AA')x + (BB'' - A'B')z]^2\\ &+A'(B''^2 - AA')(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0,\end{aligned}$$

on obtient, en faisant $A = 0$,

$$\begin{aligned}&(A'y + B'z + B''x)^2 - \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)\right]^2\\ &+A'(2Cx + 2C'y + 2C''z + D) = 0.\end{aligned}$$

Par suite, les génératrices sont représentées par

$$\left.\begin{aligned}&A'y + B'z + B''x + \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = \lambda(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &A'y + B'z + B''x - \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = -\frac{A'}{\lambda},\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

et par

$$\left.\begin{aligned}&A'y + B'z + B''x - \left[B''x + \left(B - \frac{B''}{A'B'}\right)z\right]\\ &\qquad = \mu(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &A'y + B'z + B''x + \left[B''x + \left(B - \frac{A'B'}{B''}\right)z\right]\\ &\qquad = -\frac{A'}{\mu}.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

182. Les dernières formules sont encore en défaut lorsque A' est nul. Mais, à cause de $A = 0$, $A' = 0$, $\Delta = 0$, on a $A'' = \frac{2BB'}{B''}$; d'où l'on conclut aisément, pour les équations des génératrices,

$$\left.\begin{aligned}&2(B'z + B''y) = \lambda(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &Bz + B''x = -\frac{B''}{\lambda},\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&2(Bz + B''x) = \mu(2Cx + 2C'y + 2C''z + D),\\ &B'z + B''y = -\frac{B''}{\mu}\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

183. *Remarque.* — Dans ce dernier cas, les équations des deux plans directeurs sont

$$Bz+B''x=0, \quad B'z+B''y=0.$$

184. Cylindre parabolique. — Les relations

$$B^2-A'A''=0, \quad B'^2-A''A=0, \quad B''^2-AA'=0, \quad \Delta=0$$

donnent $\qquad AA'A''=BB'B'', \quad B'B''=AB.$

Conséquemment, l'équation (14) équivaut à

$$A^2x^2+B''^2y^2+B'^2z^2+2B'B''yz+2AB'zx+2AB''xy$$
$$+A(2Cx+2C'y+2C''z+D)=0;$$

ou encore, à

$$(Ax+B''y+B'z)^2+A(2Cx+2C'y+2C''z+D)=0; \quad (22)$$

pourvu que A soit différent de zéro (1).

Ainsi, *quand l'équation représente un cylindre parabolique, les six termes du second degré forment un carré.* Cette propriété est une généralisation de celle que l'on a vue dans la discussion de l'équation à deux variables (*D. D.*, 124).

185. Ayant mis l'équation du cylindre sous la forme (22), on obtient immédiatement, pour les équations des génératrices,

$$Ax+B''y+B'z=\lambda, \quad 2Cx+2C'y+2C''z+D=-\frac{\lambda^2}{A}. \quad (23)$$

186. *Remarque.* — Pour fixer les idées, nous avons supposé que, parmi les coefficients A, A', A'', le premier était différent de zéro : si ces coefficients étaient nuls tous trois, l'équation ne représenterait pas un cylindre parabolique.

Applications.

187. *Exemple I.*

$$x^2-y^2+2z^2-2yz-4zx+4xy+2x-4y-4=0. \quad (1)$$

Coordonnées du centre : $x=-1, \quad y=-2, \quad z=-2.$

Equation réduite : $x^2-y^2+2z^2-2yz-4zx+4xy=1. \quad (2)$

Equation caractéristique : $s^3-2s^2-10s-1=0.$

Le premier membre de cette équation présentant une seule va-

riation, la surface est un *hyperboloïde à deux nappes*. Le plan diamétral, conjugué à l'axe des z, a pour équation

$$z_1 = x + \frac{1}{2} y.$$

Il ne coupe pas l'hyperboloïde; car l'ordonnée, comptée à partir de ce plan, est exprimée par

$$Z = \frac{1}{2}\sqrt{3y^2 - 4xy + 2x^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(3y^2 - 2x)^2 + 2x^2 + 6};$$

et cette quantité est essentiellement positive.

Il résulte, de la dernière valeur, que l'équation (2) peut être écrite ainsi :

$$3(2z - 2x - y)^2 - (3y - 2x)^2 - 2x^2 = 6.$$

Sous cette forme, qu'on aurait pu obtenir directement, on reconnaît encore que la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

188. *Exemple II.*

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx + 4xy + 2x - 4y - 1 = 0.$$

Coordonnées du centre : $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{15}$, $z = -\frac{2}{3}$.

Equation réduite : $x^2 - y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx + 4xy = \frac{2}{15}$.

La *décomposition en carrés* donne, par exemple,

$$(x + 2z + 2y)^2 - 2z^2 - 10yz - 5y^2 = \frac{2}{15},$$

puis $$2(x + 2z + 2y)^2 - (2z + 5y)^2 + 15y^2 = \frac{4}{15}.$$

La surface est donc un *hyperboloïde à une nappe*, dont les génératrices sont représentées par les deux systèmes d'équations :

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} + (2z + 5y) = \lambda(2 + 15y),$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} - (2z + 5y) = \frac{2 - 15y}{15\lambda};$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} + (2z + 5y) = \mu(2 - 15y),$$

$$(x + 2z + 2y)\sqrt{2} - (2z + 5y) = \frac{2 + 15y}{15\mu}.$$

189. *Exemple III.*

$$3x^2+8y^2+24z^2-28yz-18zx+10xy-2x+4y=0.$$

La surface, qui n'a pas de centre, coupe le plan des xy suivant une hyperbole : elle est donc un *paraboloïde hyperbolique*. D'ailleurs, l'équation pouvant être mise sous la forme

$$(3x+5y-9z)^2-(y-3z)^2=6(x-2y),$$

les génératrices du premier système sont représentées par les équations

$$x+2y-4z=2\lambda(x-2y),\quad 3x+4y-6z=\frac{1}{\lambda},$$

et celles du second système par

$$x+2y-4z=2\mu,\quad 3x+4y-6z=\frac{1}{\mu}(x-2y).$$

La valeur de y, déduite de la proposée, étant

$$y=\frac{14z-5x-2}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{x^2+4zx+4z^2+36x-56z+4},$$

on en conclut que le paraboloïde se projette, sur le plan des zx, à l'*extérieur* de la parabole représentée par

$$(x+2z)^2+36x-56z+4=0;$$

etc.

190. *Exemple IV.*

$$2x^2+5y^2+2z^2+2y^2+6xy+2y+4z+2=0.\quad (1)$$

Équations du centre :

$$2x+3y=0,\quad 5y+z+1=0,\quad 2z+y+2x=0.$$

La troisième équation est une conséquence des deux autres; donc l'équation proposée représente un cylindre ayant pour axe la *droite centrale* (72). La trace de ce cylindre, sur le plan des xy, est représentée par l'équation

$$2x^2+5y^2+6xy+2y+2=0,$$

laquelle se décompose en

$$2x+3y=0,\quad y+2=0.$$

Par conséquent, *le lieu se réduit à la droite centrale*. La décomposition en carrés conduit au même résultat; car l'équation (1)

peut être écrite ainsi :

$$(2x+3y)^2+(y+2z+2)^2=0 \ (^*).$$

EXERCICES.

I.

$$x^2+2y^2+2z^2+2xy$$
$$-2x-4y-4z=0 \ (\textit{ellipsoïde});$$

$$3x^2+2y^2+2z^2+2yz$$
$$+6x+6y+6z+9=0 \ (\textit{point});$$

$$3x^2+y^2+z^2+yz-3zx-2xy$$
$$+y+2=0 \ (\textit{lieu imaginaire});$$

$$x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx+2xy$$
$$-2x-2y+2z=0 \ (\textit{cylindre elliptique});$$

$$x^2+2y^2+z^2-2yz-2xy$$
$$+2y-2z+1=0 \ (\textit{droite});$$

$$x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy$$
$$-x+y-3z=0 \ (\textit{deux plans parallèles});$$

$$x^2+y^2+9z^2-6yz+6zx-2xy$$
$$-2x+2y-6z+1=0 \ (\textit{un seul plan}).$$

II.

$$x^2+y^2+2z^2+4yz-2zx-2xy$$
$$+2y-3=0 \ (\textit{hyperboloïde à une nappe});$$

$$3x^2+2y^2+4yz-2zx$$
$$-4x-8z-8=0 \ (\textit{cône});$$

$$x^2-y^2-2z^2-4yz+2xy$$
$$+2y+2z=0 \ (\textit{cylindre hyperbolique});$$

$$x^2+6yz+3zx+2xy$$
$$+x+3z=0 \ (\textit{deux plans qui se coupent}.$$

(*) En terminant, nous rappellerons encore cette propriété : *Si un polynôme est égal à la somme de deux carrés, on peut, d'une infinité de manières, le décomposer en deux autres carrés* (*D. D.*, **124**). Par exemple, le premier membre de l'équation (1), que nous venons de décomposer (à un facteur près), en

$$(2x+3y)^2+(y+2z+2)^2,$$

se décompose en

$$(x+y-z-1)^2+(x+2y+z+1)^2,$$

puis en

$$(8x+15y+6z+6)^2+(6x+5y-8z-8)^2, \text{ etc.}$$

III. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4zx + 2xy$
$+ 4y + 4z - 9 = 0$ (*hyperboloïde à deux nappes*).

IV. $x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4yz + 2xy$
$- 3x - 4y - 3z = 0$ (*paraboloïde elliptique*);
$x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 30yz + 6zx - 10xy$
$- 2x - 2y = 0$ (*cylindre parabolique*).

V. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2yz + 2zx + 2xy$
$- 4x - 2y + 2z = 0$ (*paraboloïde hyperbolique*).

VI. *Théorème.* — Le paraboloïde hyperbolique a deux génératrices parallèles à un plan quelconque (non parallèle à l'axe).

VII. Déterminer les relations qui existent entre le lieu représenté par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et le lieu représenté par l'équation homogène

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

CHAPITRE XII.

RECHERCHE DES ÉQUATIONS DE QUELQUES SURFACES.

Surfaces cylindriques.

191. Soient $F(x, y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ (1)

les équations de la *directrice* donnée; soient

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta \quad (2)$$

les équations de la *génératrice* : a, b sont des constantes données, α, β, des paramètres variables. En éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on trouvera, dans chaque cas particulier, une certaine *équation de condition*

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad (3)$$

exprimant que la génératrice s'appuie sur la directrice : cette re-

lation *algébrique* entre α et β remplace la condition *géométrique* à laquelle la génératrice est assujettie. L'élimination des deux paramètres, entre les équations (2) et (3), conduira donc à un résultat de la forme

$$y - bz = \varphi(x - az): \quad (A)$$

telle est l'*équation générale des surfaces cylindriques.*

Surfaces coniques.

192. La directrice étant donnée, comme dans le numéro précédent, par les équations (1), les équations de la génératrice seront

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c),$$

a, b, c représentant les coordonnées du sommet ou du *point directeur*. La condition exprimant que la génératrice rencontre la directrice sera encore remplacée par une équation de la forme (3), obtenue en éliminant x, y, z. Conséquemment, *l'équation générale des surfaces coniques* est

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right). \quad (B)$$

193. Si le sommet est pris pour origine, l'équation (B) se réduit à

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right). \quad (C)$$

Cette dernière forme montre *que l'équation de toute surface conique est homogène* (*), *quand le centre est pris pour origine :* ce résultat s'accorde avec ce qu'on a vu précédemment.

194. Application. — *Trouver l'équation du cône circonscrit à une surface du second ordre,* ayant pour équation

$$\left.\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Le cône sera *circonscrit,* si chacune de ses génératrices perce la surface en deux points confondus en un seul.

(*) Les deux membres de l'équation (C) sont des fonctions homogènes, du degré zéro (*D. D.*, G).

Cela posé, soient, en prenant le sommet pour origine,

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z$$

les équations de la génératrice. Les ordonnées des points où elle rencontre la surface satisfont à l'équation

$$R z^2 + 2 S z + D = 0,$$

dans laquelle

$$R = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta, \quad S = C\alpha + C'\beta + C''.$$

Les deux points coïncideront si $S^2 = RD$. Par conséquent, l'équation $\beta = \varphi(\alpha)$ devient ici

$$(C\alpha + C'\beta + C'')^2 = (A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'' + 2B\beta + 2B'\alpha + 2B''\alpha\beta)D.$$

Par suite, le cône est représenté par

$$\left.\begin{aligned} &(Cx + C'y + C''z)^2 \\ &= (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy)D. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

195. *Remarque.* — La *courbe de contact* du cône et de la surface donnée, évidemment représentée par les équations (5) et (4), est représentée aussi par cette dernière équation, jointe à

$$(Cx + C'y + C''z)^2 + (2Cx + 2C'y + 2C''z + D)D = 0.$$

Le premier membre de cette nouvelle équation est le carré de $Cx + C'y + 2C''z + D$. On conclut de là que *la courbe suivant laquelle un cône touche une surface du second ordre est contenue dans un plan parallèle au plan diamétral conjugué avec la droite qui joint le sommet du cône au centre de la surface* (*).

(*) Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre; la droite dont il s'agit sera représentée par $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$, et le plan diamétral qui lui est conjugué aura pour équation

$$\begin{aligned} &(Ax_1 + B'z_1 + B''y_1)x + (A'y_1 + B''x_1 + Bz_1)y \\ &+ (A''z_1 + By_1 + B'x_1)z + Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 = 0, \end{aligned}$$

ou, plus simplement,

$$-Cx - C'y - C''z + Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 = 0.$$

Surfaces de révolution.

196. On peut regarder une pareille surface comme *engendrée par une circonférence dont le centre décrit une droite donnée, dont le plan reste perpendiculaire à cette droite, et qui rencontre une ligne donnée* (*).

Adoptant ce mode de génération, et représentant par a, b, c les coordonnées d'un point C de l'axe, nous prendrons, pour équations de cette droite,

$$x - a = m(z - c), \quad y - b = n(z - c).$$

Les *parallèles* de la surface peuvent être obtenus en coupant des sphères ayant pour centre commun le point C, par des plans perpendiculaires à l'axe ; les équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \alpha^2,$$
$$m(x - a) + n(y - b) + (z - c) = \beta$$

représentent donc la génératrice (**). En exprimant qu'elle rencontre la directrice donnée, on arrivera, comme dans les exemples précédents, à une équation de condition telle que $\alpha^2 = \varphi(\beta)$. Par suite, *l'équation générale des surfaces de révolution est*

$$\left.\begin{aligned}&(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2\\ &= \varphi[m(x - a) + n(y - b) + z - c].\end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

197. *Remarque.* — Si l'on prend l'axe de rotation pour axe des z, on peut supposer $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; l'équation (D) devient donc

$$x^2 + y^2 = \varphi(z) - z^2,$$

ou, plus simplement,

$$x^2 + y^2 = \psi(z). \quad \text{(E)}$$

Cette dernière exprime, comme on pouvait s'y attendre, que *le rayon du parallèle dépend de sa distance à l'origine.*

198. Application. — *Trouver l'équation du tore.*

La directrice étant *un cercle situé dans un même plan avec l'axe*

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie.

(**) On suppose les coordonnées rectangulaires.

de rotation, nous pouvons représenter cette ligne par

$$(x-a)^2+z^2=R^2, \quad y=0.$$

L'élimination de x, y, z entre ces deux équations et

$$x^2+y^2=\alpha^2, \quad z=\beta,$$

conduit à $$(\pm\alpha-a)^2+\beta^2=R^2.$$

Conséquemment, le tore a pour équation

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=R^2,$$

ou $$(x^2+y^2+z^2+a^2-R^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

Surfaces conoïdes.

199. On donne ce nom aux surfaces engendrées par *une droite assujettie à rester parallèle à un plan donné, et à s'appuyer sur une directrice rectiligne et sur une autre directrice quelconque* (*).

Si l'on prend le *plan directeur* pour plan des xy, et la directrice rectiligne pour axe des z, *l'équation générale des surfaces conoïdes* aura évidemment la forme

$$\frac{y}{x}=\varphi(z). \quad (\text{F})$$

200. Application. — *Trouver l'équation de l'héliçoïde à plan directeur.*

Ici, la seconde directrice est une *hélice* tracée sur un cylindre dont l'axe est la directrice rectiligne supposée, pour plus de simplicité, perpendiculaire au plan directeur. Considérons seulement le cas où la tangente à l'hélice fait, avec le plan directeur, un angle de 45°. En prenant pour unité le rayon du cylindre, et en faisant passer l'axe des x par un point de l'hélice, nous aurons, pour les équations de cette courbe,

$$x=\cos z, \quad y=\sin z \ (^{**}).$$

(*) Le paraboloïde hyperbolique est un conoïde dans lequel la seconde directrice est rectiligne.

(**) Pour trouver ces équations, on doit se rappeler que, dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne; etc.

Les équations de la génératrice sont d'ailleurs

$$\frac{y}{x} = \alpha, \quad z = \beta;$$

α et β satisfaisant à la relation

$$\alpha = \operatorname{tang} \beta,$$

que l'on obtient en éliminant x, y et z. Par suite, l'équation de l'héliçoïde est

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} z.$$

EXERCICES.

I. Discuter la courbe que l'on obtient en coupant un tore par un plan *oblique* à l'axe de rotation et passant par le *centre* de la surface. Dans quel cas cette courbe se compose-t-elle du système de deux cercles?

II. *Théorème.* — L'héliçoïde à plan directeur peut être engendré par une droite qui s'appuie sur une génératrice du cylindre auquel appartient l'hélice directrice.

III. *Théorème.* — Si l'on projette une hélice sur le *plan directeur,* au moyen de droites parallèles à une tangente à cette courbe, la projection sera une cycloïde.

IV Trouver l'équation de l'*héliçoïde développable,* ou du lieu des tangentes à une hélice.

Résultat :

$$x \cos\left(z \pm \sqrt{x^2+y^2-1}\right) + y \sin\left(z \pm \sqrt{x^2+y^2-1}\right) = 1.$$

V. Une circonférence C, de rayon R, *roule* dans l'intérieur d'une circonférence fixe C′, de rayon 2R, en entraînant une circonférence C″ qui a, avec la circonférence C, un diamètre commun, mais dont le plan est perpendiculaire au plan des circonférences C, C′. On demande : 1° quelle est la ligne décrite dans l'espace par un point quelconque lié à la circonférence C″; 2° quelle est la surface engendrée par C″.

VI. Discuter les surfaces représentées par les équations

$$z = \frac{y^2 + x^2 - xy}{y^2 - x^2 - xy}, \quad z = \frac{y^2 - 2xy + 2x}{y^2 - 2xy + 2y}, \quad z = \frac{(y-x)^2}{(y+x)^2}.$$

VII. Trouver les sections rectilignes de la surface dont l'équation est

$$x^3+y^3+z^3=1.$$

VIII. $$z=e^x+e^y,\quad z=\log\frac{\cos x}{\cos y},$$

$$z=\text{arc tang}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)\ (\textit{héliçoïde rampant}).$$

IX. Une sphère, dont le centre est sur la surface d'un cône de révolution, coupe cette surface suivant une certaine ligne L. Si l'on fait le développement du cône, la ligne L se transforme en une autre ligne L', dont on demande l'équation.

CHAPITRE XIII.

THÉORIES GÉNÉRALES (*).

De la tangente.

201. On sait que *la projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de la courbe* (**). D'après ce théorème, si une courbe est représentée par

$$x=f(z),\quad y=\varphi(z),\quad (1)$$

les équations de la tangente à cette ligne, au point (x, y, z), sont

$$X-x=f'(z)(Z-z),\quad Y-y=\varphi'(z)(Z-z),\quad (2)$$

ou, plus simplement,

$$X-x=x'(Z-z),\quad Y-y=y'(Z-z).\quad (3)\ (***)$$

(*) Les théories contenues dans ce dernier chapitre étant presque indispensables à l'étude de la Mécanique, nous n'avons pas cru devoir les passer sous silence.

(**) *Géométrie descriptive*, seconde partie.

(***) Nous représenterons, dorénavant, par X, Y, Z les coordonnées *courantes*, par x, y, z les coordonnées d'un point particulier; x', y', z', etc., désigneront des dérivées (*D. D.*, **154**).

202. Passons au cas général d'une courbe représentée par

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \quad (4)$$

Dans ces deux équations, x et y sont des fonctions implicites de z. Nous aurons donc (*Alg.*, **214**), en conservant la notation précédente,

$$x'F'_x + y'F'_y + F'_z = 0, \quad x'\Phi'_x + y'\Phi'_y + \Phi'_z = 0. \quad (5)$$

On pourrait résoudre ces dernières équations par rapport à x', y'; après quoi l'on substituerait, dans les équations (3), les valeurs trouvées pour ces deux inconnues; mais il est évidemment plus simple de remplacer, dans les équations (5), x' par $\frac{X-x}{Z-z}$ et y' par $\frac{Y-y}{Z-z}$. On obtient ainsi, pour les équations de la tangente,

$$\left.\begin{array}{l}(X-x)F'_x + (Y-y)F'_y + (Z-z)F'_z = 0,\\ (X-x)\Phi'_x + (Y-y)\Phi'_y + (Z-z)\Phi'_z = 0.\end{array}\right\} \quad (6)$$

Du plan tangent et de la normale.

203. Théorème. — *Les tangentes en un point* M *d'une surface, à toutes les courbes menées de ce point sur la surface, sont situées dans un même plan, appelé plan tangent à la surface.*

Ce théorème résulte immédiatement des équations (6). En effet, chacune de ces équations représente un plan qui passe par le point M (x, y, z), et dont la position dépend *d'une seule* des deux surfaces caractérisées par les fonctions F et Φ. Si donc l'on fait varier cette seconde fonction, on obtiendra différentes courbes, toutes situées sur la première surface, et dont les tangentes appartiendront au premier des deux plans. C'est ce qu'il fallait démontrer (*).

204. Corollaire. — *La tangente en un point de la courbe suivant laquelle se coupent deux surfaces, est l'intersection des plans tangents aux deux surfaces, en ce point.*

205. La *normale* en un point (x, y, z) d'une surface est la perpendiculaire au plan tangent, en ce point. Conséquemment, si les

(*) Nous laissons de côté certains cas exceptionnels (*Géométrie descriptive*, seconde partie).

axes sont rectangulaires, les équations de la normale seront

$$\frac{X-x}{F'_x}=\frac{Y-y}{F'_y}=\frac{Z-z}{F'_z}. \quad (7)$$

Des lignes considérées comme trajectoires.

206. On peut regarder une ligne quelconque, plane ou à double courbure, comme *le lieu des positions d'un point* M *qui se meut d'après une loi déterminée :* ce lieu, c'est-à-dire la *trajectoire du point*, sera complétement défini si les coordonnées x, y, z de M sont exprimées en fonction d'un *paramètre* t (*).

D'après cette considération, les équations (4) peuvent être remplacées par

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t). \quad (8)$$

Au moyen de cette convention, la tangente au point M sera représentée par les équations très-symétriques

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}, \quad (9)$$

dans lesquelles x', y', z' désignent les dérivées de x, y, z, relatives à t.

207. *Remarque.* Si $t=z$, les équations (9) ne diffèrent pas des équations (3).

Du plan normal.

208. Le *plan normal* à une courbe, en un point M, est le plan mené par ce point, perpendiculairement à la tangente. De cette définition résulte immédiatement *l'équation du plan normal :*

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0. \quad (10)$$

En effet, cette équation appartient à un plan passant par le point M (x, y, z), et perpendiculaire à la droite représentée par les équations (9).

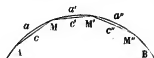
(*) On peut supposer que t représente *le temps*, compté à partir de la *position initiale* du mobile.

Dérivée de l'arc.

209. LEMME. — *La différence entre un petit arc de courbe et la corde correspondante peut devenir aussi petite que l'on voudra par rapport à l'arc.*

La différence $a - c$ entre l'arc a et la corde c peut évidemment être représentée par af: il s'agit de démontrer que la *fraction* f s'annule avec a, ou qu'elle a pour limite zéro.

Si cette limite était différente de zéro, la fraction f surpasserait, à chaque instant, une certaine constante positive k, et l'on aurait



$$a - c > ak.$$

Appliquons cette inégalité aux différents *éléments* a, a', a'',..., d'un arc quelconque AB; il en résultera

$$(a+a'+a''+\ldots)-(c+c'+c''+\ldots)>(a+a'+a''+\ldots)k;$$

ou, en désignant par A la longueur de AB, et par P le périmètre du polygone inscrit AMM'... B:

$$A - P > Ak.$$

Quand le nombre des points de division M, M', M'',..., augmente indéfiniment, le périmètre P tend vers *sa limite* A; donc la dernière inégalité est absurde, etc.

210. COROLLAIRES. — I. *La différence entre l'arc* a *et sa corde* c *a la forme* $a\varepsilon$, ε *ayant pour limite zéro.*

II. *Le rapport de l'arc à la corde, qui décroît avec l'arc, a pour limite l'unité* (*).

En effet, de $a - c = a\varepsilon$, on conclut

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

211. THÉORÈME. — *La dérivée* s' *d'un arc de courbe, et les dérivées* x', y', z *des coordonnées du point* M *qui le termine, sont liées par l'équation*

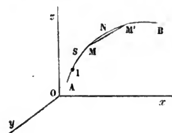
$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (11)$$

(*) Le théorème sur la limite du rapport entre un arc et son sinus est un cas particulier de celui-ci.

Soient, comme précédemment

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad (8)$$

les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe AB. Soit s la longueur d'un arc IM de AB, cet arc étant compté à partir d'une certaine *origine* I. La quantité s est évidemment une fonction de la *variable indépendante* t : nous allons démontrer que cette fonction est définie par l'équation (11).



Soit M' un point de AB, aussi voisin qu'on le voudra de M; soient

$$x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z, \quad s + \Delta s,$$

les valeurs de x, y, z, s relatives à ce nouveau point. En représentant par c la corde MM', on aura, les axes étant rectangulaires,

$$c^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2;$$

ou, à cause de $c = (1 - \varepsilon)\Delta s$ (210), et en divisant les deux membres par $(\Delta t)^2$:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 (1 - \varepsilon)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2.$$

Passant à la limite, et ayant égard au corollaire I, on obtient l'équation (11).

212. *Remarques.* — I. Le problème de la *rectification des courbes* consiste à trouver la fonction s, connaissant sa dérivée s' : il ne diffère pas du problème des *quadratures* (*D. D.,* 344).

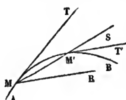
II. D'après les équations (9) et (11), les cosinus des angles α, β, γ, que fait la tangente avec les axes, sont donnés par les formules

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{s'}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{s'}. \quad (12)$$

Du plan osculateur.

213. *Définition.* — Le plan osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite vers laquelle tend le plan passant par la tan-

gente MT et par la sécante MM'S, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment de M (*).



214. *Remarque.* — Si l'on mène MR parallèle à la tangente M'T', le plan TMR se confondra, à la limite, avec le plan osculateur.

En effet, l'angle SM'T' a pour limite zéro; donc l'angle des plans TMS, TMR a également pour limite zéro.

215. *Équation du plan osculateur.* — Pour la trouver, nous commencerons, en nous appuyant sur la dernière remarque, par former l'équation du plan TMR.

Soit $$A(X-x)+B(Y-y)+Z-z=0 \quad (\alpha)$$

cette équation. Les tangentes MT, M'T' font, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à x', y', z', et à $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ (**). Donc (41)

$$Ax'+By'+z'=0,$$
$$A(x'+\Delta x')+B(y'+\Delta y')+z'+\Delta z'=0;$$

ou, plus simplement,

$$Ax'+By'+z'=0, \quad (\beta) \qquad A\Delta x'+B\Delta y'+\Delta z'=0. \quad (\gamma)$$

L'élimination de A et de B, entre les équations (β), (γ), (α), donne ensuite

$$\begin{aligned}&(y'\Delta z'-z'\Delta y')(X-x)\\ +&(z'\Delta x'-x'\Delta z')(Y-y)\\ +&(x'\Delta y'-y'\Delta x')(Z-z)=0.\end{aligned}$$

Divisant tous les termes par Δt, et passant à la limite, nous trouvons enfin l'*équation du plan osculateur :*

$$\left.\begin{aligned}&(y'z''-z'y'')(X-x)\\ +&(z'x''-x'z'')(Y-y)\\ +&(x'y''-y'x'')(Z-z)=0.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

(*) Le plan osculateur d'une courbe plane est évidemment le plan même de cette ligne.

(**) Il est à peine besoin de rappeler que $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ représentent les *accroissements des fonctions* x', y', z', correspondant à l'accroissement Δt de la variable t.

Du cercle osculateur.

216. *Définition.* — Le cercle osculateur à une courbe AB, en un point M, est la limite des cercles ayant, avec cette courbe, une tangente commune MT, et passant par un point M′ voisin de M.

217. *Axe du cercle osculateur.* — Ce cercle, évidemment situé dans le plan osculateur de la courbe, serait déterminé si l'on en connaissait *l'axe*, c'est-à-dire la droite menée par le centre, perpendiculairement au plan osculateur.

L'axe du cercle quelconque dont le cercle osculateur est la limite, est l'intersection du plan normal en M avec le plan perpendiculaire au milieu de MM′; mais, l'emploi de ce dernier plan conduisant à des transformations assez difficiles à saisir, nous admettrons, pour abréger et simplifier, que *l'axe du cercle osculateur est la limite vers laquelle tend l'intersection du plan normal en* M *avec le plan normal en* M′ (*).

L'équation du plan normal en M étant

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0, \quad (10)$$

si l'on y remplace x, y, z, x', y', z' par leurs valeurs en fonction de t, elle prendra la forme

$$F(X, Y, Z, t)=0.$$

L'équation du plan normal en M′ sera donc

$$F(X, Y, Z, t+\Delta t)=0;$$

et l'intersection des deux plans pourra être représentée, soit par ces deux équations, soit par la première jointe à

$$\frac{F(X, Y, Z, t+\Delta t)-F(X, Y, Z, t)}{\Delta t}=0.$$

A la limite, cette dernière équation devient (**)

$$F'_t(X, Y, Z, t)=0.$$

(*) Cette proposition peut être rigoureusement démontrée.

(**) La transformation précédente est celle dont on fait usage pour établir la *théorie des enveloppes*.

Ainsi, *l'axe du cercle osculateur est représenté par l'équation du plan normal et par l'équation dérivée de celle-ci.*

Cette équation dérivée est, à cause de la formule (11)

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = s'^2. \quad (14)$$

218. *Remarque.* — Le *centre* du cercle osculateur a pour coordonnées les valeurs de X, Y, Z qui vérifient les équations (10), (13) et (14).

219. *Rayon du cercle osculateur* (*). — Posons, dans ces équations,

$$X - x = \rho\cos\lambda, \quad Y - y = \rho\cos\mu, \quad Z - z = \rho\cos\nu:$$

ρ représente la distance comprise entre le point M de la courbe AB et le centre C du cercle osculateur, c'est-à-dire le rayon de ce cercle; λ, μ, ν sont les angles que fait *la direction* MC avec les parties positives des axes. Nous aurons ainsi

$$x'\cos\lambda + y'\cos\mu + z'\cos\nu = 0,$$
$$(y'z'' - z'y'')\cos\lambda + (z'x'' - x'z'')\cos\mu + (x'y'' - y'x'')\cos\nu = 0,$$
$$[x''\cos\lambda + y''\cos\mu + z''\cos\nu]\rho = s'^2. \quad (\delta)$$

Les deux premières équations donnent,

$$\frac{\cos\lambda}{z'(z'x'' - x'z'') - y'(x'y'' - y'x'')}$$
$$= \frac{\cos\mu}{x'(x'y'' - y'x'') - z'(y'z'' - z'y'')}$$
$$= \frac{\cos\nu}{y'(y'z'' - z'y'') - x'(z'x'' - x'z'')},$$

ou

$$\frac{\cos\lambda}{x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'')}$$
$$= \frac{\cos\mu}{y''(z'^2 + x'^2) - y'(z'z'' + x'x'')}$$
$$= \frac{\cos\nu}{z''(x'^2 + y'^2) - z'(x'x'' + y'y'')}.$$

(*) Pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, ce rayon est appelé aussi *rayon de courbure*.

A cause de la relation

$$x'^2+y'^2+z'^2=s'^2, \quad (11)$$

qui conduit à $\qquad x'x''+y'y''+z'z''=s's''$,

nous pouvons encore remplacer les égalités précédentes par celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos\lambda}{s'x''-x's''}=\frac{\cos\mu}{s'y''-y's''}=\frac{\cos\nu}{s'z''-z's''}\\ =\frac{1}{s'\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}\end{aligned}\right\}\quad (15)\,(*);$$

en sorte que les trois cosinus sont déterminés.

Substituant leurs valeurs dans l'équation (δ), on obtient enfin

$$\rho=\frac{s'^2}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}. \quad (16)$$

220. *Remarque*. — On conclut aisément, des formules (2) et des équations (15) et (16) :

$$\frac{\cos\lambda}{(\cos\alpha)'}=\frac{\cos\mu}{(\cos\beta)'}=\frac{\cos\nu}{(\cos\gamma)'}=\frac{\rho}{s'}, \quad (17)$$

les accents indiquant des dérivées relatives à t.

EXERCICES.

I. Dans le cas de l'hélice, représentée par

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t,$$

on trouve :

1°. *Équations de la tangente :*

$$\frac{X-\cos t}{-\sin t}=\frac{Y-\sin t}{\cos t}=Z-t;$$

(*) En effet, la somme des carrés des trois premiers dénominateurs est

$$(x'^2+y'^2+z'^2)s''^2-2(x'x''+y'y''+z'z'')s's''+(x''^2+y''^2+z''^2)s'^2$$
$$=s'^2s''^2-2s'^2s''^2+(x''^2+y''^2+z''^2)s'^2;\ \text{etc.}$$

2°. *Équation du plan normal :*

$$-X\sin t + Y\cos t + Z - t = 0;$$

3°. $$s' = \sqrt{2};$$

4°. $$\cos\alpha = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta = \frac{\cos t}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

5°. *Équation du plan osculateur :*

$$X\sin t - Y\cos t + Z - t = 0;$$

6°. $\cos\lambda = -\cos t$, $\cos\mu = -\sin t$, $\cos\nu = 0$, $\rho = 2$ (*).

II. Appliquer les formules (9), (10),..., (17) à l'*hélice conique*, dont les équations sont

$$x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t.$$

III. Un point parcourt une circonférence pendant que celle-ci tourne autour d'un de ses diamètres, supposé fixe. La *vitesse angulaire* du point est égale à la *vitesse de rotation* de la circonférence. On demande : 1° les équations de la trajectoire ; 2° l'équation du plan osculateur de cette ligne ; 3° l'expression de son rayon de courbure ; etc.

IV. Un conoïde, circonscrit à une sphère, a pour directrice rectiligne une *tangente* à cette surface, perpendiculaire au plan directeur du conoïde. On demande : 1° l'équation du conoïde ; 2° les équations de la courbe suivant laquelle il touche la sphère ; etc.

Résultats :

1°. *Équation du conoïde :*

$$(x^2+y^2)z^2 - R^2x^2 = 0.$$

2°. *Équations de la courbe de contact :*

$$(x^2+y^2)z^2 - R^2x^2 = 0,\quad x^2+y^2+z^2 - 2Rx = 0;$$

ou $$z^2 - Rx = 0,\quad x^2+y^2 - Rx = 0 \text{ (**)};$$

(*) On déduit, des dernières valeurs, que *l'hélice donnée, et le lieu de ses centres de courbure, sont deux courbes symétriques par rapport à l'axe du cylindre.*

(**) Les projections de cette courbe, sur deux des *plans principaux* du conoïde, sont donc *une parabole* et *un cercle*.

ou encore $x = R\sin^2 t,\quad y = R\sin t\cos t,\quad z = R\sin t$ (*).

3°. *Équation du plan osculateur :*

$$X\sin t(3\cos^2 t + \sin^2 t) + 2Y\cos^3 t - 2Z + R\sin^3 t = 0.$$

4°. *Rayon de courbure :*

$$\rho = R\frac{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5+3\cos^2 t}}.$$

(*) Les dernières valeurs montrent que *la courbe de contact de la sphère et du conoïde est* précisément *la trajectoire proposée* dans la question III. Des considérations géométriques très-simples conduisent au même résultat.

Cette même courbe jouit d'une propriété curieuse, découverte par Viviani : *Si l'on considère le triangle sphérique ayant pour côtés deux quadrants perpendiculaires et la demi-trajectoire passant par leurs extrémités, ce triangle est équivalent au carré du rayon de la sphère.*



MÉCANIQUE.

CHAPITRE Ier.

INTRODUCTION.

Notions préliminaires.

1. Les *corps* sont ordinairement considérés comme des assemblages de parties très-petites, de forme invariable, physiquement indivisibles, appelées *atomes, molécules* (*) ou *points matériels*.

2. Il paraît impossible de définir, d'une manière satisfaisante, soit le *temps*, soit l'*espace*. Malgré cette impossibilité, on conçoit clairement que : *tout corps occupe dans l'espace, à chaque instant, un lieu déterminé*.

3. Si ce lieu est invariable, au moins *pendant un certain temps*, et si chacune des parties du corps participe à cette invariabilité, le corps est dit *en repos*; dans le cas contraire, on dit qu'il est *en mouvement*. En d'autres termes :

Un corps est en repos si chacune de ses parties occupe un lieu invariable; il est en mouvement si quelqu'une de ses parties occupe, successivement, divers lieux dans l'espace.

4. *Remarques.* — I. Le repos et le mouvement, tels que nous venons de les considérer, sont appelés *repos absolu* et *mouvement absolu*. Mais, comme *l'espace est infini*, nous ne pouvons juger de la position d'un corps qu'en le rapportant à d'autres corps ou à nous-mêmes : tous les mouvements que nous observons sont donc des *mouvements relatifs*. A plus forte raison, nous ne pouvons connaître que le *repos relatif*. Quand nous affirmons qu'un meuble, placé dans une chambre, est en repos, nous voulons exprimer

(*) La distinction entre les atomes et les molécules, bonne quand on étudie les corps au point de vue de la Physique ou de la Chimie, est inutile en Mécanique.

seulement que ce meuble ne change pas de situation à l'égard des parois de la chambre : en réalité, le meuble, aussi bien que la chambre, participe au mouvement de rotation de la terre, à son mouvement de translation autour du soleil et au mouvement de translation du système solaire. Le *repos absolu* est donc peut-être une simple abstraction.

II. Pour qu'un corps soit en repos, même en repos relatif, il ne suffit pas que sa surface extérieure conserve une position invariable; il faut encore que chacune de ses parties soit immobile. Une sphère dont le centre serait fixe, et qui, par conséquent, semblerait en repos, pourrait cependant avoir des mouvements plus ou moins compliqués.

III. L'idée de mouvement entraîne celle de *continuité :* on ne comprendrait pas qu'un point matériel eût occupé deux positions différentes A, B, sans avoir décrit, dans l'espace, une certaine ligne terminée par A et par B. Cette ligne est ce qu'on appelle la *trajectoire* du point.

5. La *Mécanique* est la science du mouvement.

De la mesure du temps.

6. Bien qu'on ne puisse pas *définir* le temps (2), il est facile de concevoir des *temps égaux*, et, par suite, d'arriver à la notion de la *mesure du temps.*

Supposons, en effet, que des corps A, B, C, D, ..., *identiques* de forme, de composition, de volume, etc., soient successivement mis en mouvement, dans des circonstances *identiques,* à cela près que le mouvement de B commence quand cesse celui de A, que le mouvement de C commence quand cesse celui de B, etc. : les temps pendant lesquels s'exécuteront ces mouvements successifs seront dits *égaux entre eux.*

Pour fixer les idées, admettons que les corps A, B, C,... soient des sphères pesantes, égales entre elles, suspendues par des fils égaux et également inclinées sur la verticale. Si nous abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère A, le fil qui la soutenait se rapprochera de la verticale pour s'en écarter ensuite; quand il aura effectué une *oscillation* complète, c'est-à-dire quand il cessera de s'écarter de la verticale, abandonnons à l'action de la pesanteur la sphère B : la *durée de l'oscillation* de celle-ci sera égale à la durée

de la première oscillation. En continuant de la même manière, on voit que les sphères A, B, C, D,... exécutent leurs oscillations consécutives dans des temps égaux, et que les temps pendant lesquels s'effectuent deux, trois, quatre,... oscillations, sont doubles, triples, quadruples,... de la durée d'une seule oscillation.

7. Chacun des appareils dont nous venons de donner l'idée est ce qu'on appelle un *pendule*. Si le corps pesant est réduit à un point matériel, et que le fil de suspension soit inextensible et sans pesanteur, l'appareil, qui devient alors purement idéal, prend le nom de *pendule simple : un pendule simple est* donc *un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité inférieure d'un fil inextensible et sans pesanteur, dont l'autre extrémité est fixe.* On appelle, en général, *pendule composé*, tout corps solide pesant, qui oscille autour d'un axe horizontal fixe.

8. Que le pendule soit simple ou composé, ses oscillations s'exécutent dans des temps égaux, c'est-à-dire qu'elles sont *isochrones* (*). Il n'est donc pas nécessaire, pour mesurer un temps quelconque, d'employer, comme nous l'avions supposé tout à l'heure, plusieurs pendules A, B, C, D,... oscillant successivement; il suffit de compter le nombre des oscillations exécutées, pendant ce temps, par un pendule unique.

9. La durée du jour *sidéral* n'ayant pas varié d'une manière appréciable depuis les plus anciennes observations, elle pourrait être prise comme unité de temps; et, pour évaluer les *fractions de jour,* on compterait le nombre des oscillations effectuées par un pendule quelconque, pendant le temps donné et pendant un jour sidéral. Néanmoins, on a trouvé plus commode de prendre pour unité le *jour solaire moyen,* et de le partager en 86 400 secondes sexagésimales. En outre, on a adopté pour *pendule-étalon* celui qui exécute son oscillation en une seconde, ou qui bat 86 400 oscillations en un jour solaire moyen.

(*) Cette proposition n'est pas vraie d'une manière absolue : par suite de la résistance de l'air, des frottements, etc., l'*amplitude* des oscillations diminue de plus en plus, et le pendule finit par s'arrêter.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT D'UN POINT.

Mouvement uniforme.

10. Nous avons déjà vu que l'on appelle *trajectoire* d'un point matériel la ligne décrite par ce point dans l'espace. Suivant que la trajectoire est droite ou courbe, le mouvement est dit *rectiligne* ou *curviligne*.

11. Au lieu de considérer, dans le mouvement d'un point matériel, la nature de la trajectoire, on peut étudier la *relation* qui existe *entre l'espace parcouru* par le mobile, compté à partir d'une certaine origine, *et le temps* correspondant. Cette relation est la plus simple possible quand *le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux,* auquel cas le mouvement est dit *uniforme.*

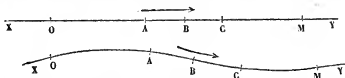
12. Il résulte, de cette définition du mouvement uniforme, que si le mobile a parcouru un certain espace dans un temps donné, il parcourra un espace double, triple, quadruple,... dans un temps double, triple, quadruple,... : autrement dit, *les espaces parcourus sont proportionnels au temps.* Par suite, *si l'on divise l'espace parcouru,* quel qu'il soit, *par le temps employé à le parcourir, on devra trouver un quotient constant : ce quotient,* évidemment *égal à l'espace parcouru dans l'unité de temps, est ce qu'on appelle la vitesse du mobile* (*).

13. Si, comme on le suppose habituellement (9), l'unité de temps est la seconde sexagésimale, on aura, pour *valeur de la vitesse,* dans un mouvement uniforme quelconque, *l'espace parcouru par le mobile en une seconde.*

14. Il nous est bien facile actuellement d'obtenir la *formule du*

(*) « Pour parler exactement, cet espace n'est que la mesure de la vitesse, et non pas la vitesse elle-même. La vitesse d'un point matériel en mouvement est une chose qui réside dans ce point, dont il est animé, qui le distingue actuellement d'un point matériel en repos, et n'est pas susceptible d'une autre définition. » (POISSON, *Traité de Mécanique.*)

mouvement uniforme, c'est-à-dire la relation entre l'espace et le temps. En effet, soient XY la trajectoire du point matériel M;



O l'*origine des espaces*, ou le point fixe à partir duquel sont comptées les distances; A la position du mobile à l'*origine des temps* (*): si nous appelons a la distance OA, et si nous désignons par b chacun des espaces égaux AB, BC,... parcourus dans l'unité de temps, nous aurons, pour expression de la distance x à laquelle sera le mobile M, au bout d'un nombre quelconque t d'unités de temps,

$$x = a + bt. \quad (1)$$

15. *Remarques.* — I. Dans cette formule, b, espace parcouru dans l'unité de temps, est la vitesse (**).

II. Si l'on supposait que le mobile fût parti du point A, x *ne représenterait plus un espace parcouru :* pour rendre la formule plus générale, il vaut mieux admettre que *le point matériel* M *se meut, depuis un temps indéfini, sur sa trajectoire* XY, *et qu'il a passé en* A *à l'origine des temps.*

III. L'équation (1) a été obtenue en supposant que le mouvement avait lieu dans le sens indiqué par la flèche; s'il s'exécute en sens contraire, la formule propre à le représenter ne différera de la première que par le changement de b en $-b$. On peut donc employer cette formule (1) dans tous les cas, pourvu que l'on convienne de regarder une vitesse comme positive ou comme négative, suivant que le mouvement a lieu dans un sens ou dans le sens opposé.

16. Si l'origine des espaces correspond à l'origine des temps, $a = 0$, et l'équation (1) se réduit à

$$x = bt. \quad (2)$$

(*) Ordinairement, A est la *position initiale du mobile;* mais cela n'est pas nécessaire.

(**) On verra plus loin ce qu'on doit entendre par *direction* de la vitesse, dans le cas d'un mouvement curviligne.

Dans cette nouvelle formule, x *représente* véritablement *l'espace parcouru pendant le temps* t (*); aussi la vitesse b a-t-elle pour expression $\frac{x}{t}$.

Mouvement varié.

17. *Un mouvement varié* est celui qui n'est *ni uniforme, ni composé de mouvements uniformes*. Il est évident que, pour une même trajectoire, on peut imaginer une infinité de mouvements variés : chacun d'eux sera déterminé quand on donnera *la relation* $\varphi(x, t) = 0$ *qui existe entre l'espace et le temps* (11). Par exemple,

$$x = t^2 - 3t + 2, \quad (1)$$

$$x = \frac{1+t}{1+t^2}, \quad (2)$$

$$x = \sin t, \quad (3)$$

sont les formules d'autant de mouvements, très-différents les uns des autres. En effet, on reconnaît sans peine que :

1°. Dans le mouvement déterminé par la formule (1), le temps t variant de $-\infty$ à $+\infty$, l'espace x varie de $+\infty$ à $-\frac{1}{4}$, et de $-\frac{1}{4}$ à $+\infty$;

2°. Dans la deuxième formule,

t variant de $-\infty$ à $-(1+\sqrt{2})$, x varie de 0 à $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

t variant de $-(1+\sqrt{2})$ à -1, x varie de $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ à 0;

t variant de -1 à $\sqrt{2}-1$, x varie de 0 à $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$;

t variant de $\sqrt{2}-1$ à $+\infty$, x varie de $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ à 0 (**).

(*) C'est-à-dire, *pendant un temps dont le rapport à l'unité est représenté par t.*

(**) La discussion des formules (1) et (2) est toute semblable à celle que l'on rencontre dans les questions de maximum et de minimum. (*B., Alg.*)

3°. Le mouvement représenté par la formule (3) est périodique, c'est-à-dire que si l'on fait croître t de $-\infty$ à $+\infty$, l'espace x, toujours compris entre $+1$ et -1, repassera indéfiniment par les mêmes valeurs : cette formule indique donc un mouvement de *va-et-vient*, analogue à celui d'un *factionnaire*.

18. *Courbe des espaces.* — La théorie des coordonnées et des lieux géométriques peut être utilement appliquée à l'étude du mouvement d'un point matériel. En effet, si l'on prend des abscisses proportionnelles aux temps et des ordonnées proportionnelles aux espaces correspondants, le lieu de l'équation $\varphi(x, t) = 0$, lieu auquel on donne le nom de *courbe des espaces*, indique à chaque instant la situation du mobile sur la trajectoire. Ainsi, suivant que l'ordonnée d'un point de la première courbe est *positive* ou *négative*, le mobile est *à droite* ou *à gauche* de l'origine des espaces ; suivant que l'ordonnée *croît* ou *décroît*, le mobile *s'éloigne* ou *se rapproche* de cette origine ; etc. (*). Les mouvements considérés ci-dessus (17) seraient représentés, respectivement, par une parabole ordinaire, par une courbe du troisième degré, et par une sinusoïde.

19. *Remarque.* — Souvent l'équation $\varphi(x, t) = 0$ est remplacée par une *table numérique* donnant certaines valeurs de t et les valeurs correspondantes de x, fournies par l'observation directe. Alors, pour construire la courbe des espaces, on effectue une véritable *interpolation* (*Alg.*, 353).

CHAPITRE III.

DE LA VITESSE.

20. *Vitesse moyenne.* — On a vu, plus haut, ce qu'on appelle vitesse dans un mouvement uniforme. Pour arriver à la définition de la vitesse dans un mouvement varié quelconque, nous considérerons d'abord la *vitesse moyenne* dans un mouvement composé de

(*) On verra bientôt que cette construction graphique donne aussi la vitesse du mobile, *en grandeur* et *en signe*.

mouvements uniformes; et, à cet effet, nous nous proposerons la question suivante:

Un mobile a parcouru, successivement,

La partie	A_0A_1	*de sa trajectoire,*	*avec une vitesse constante*	v_1,
»	A_1A_2	»	»	v_2,
»	A_2A_3	»	»	v_3,
.....	.....	.....	.....	.....
»	$A_{n-1}A_n$	»	»	v_n;

quelle serait la vitesse V *d'un second mobile qui parcourrait, d'un mouvement uniforme, la trajectoire* A_0A_n, *de manière à rencontrer le premier mobile aux extrémités* A_0, A_n *de cette ligne?*



Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les temps employés par le premier mobile à parcourir les espaces $A_0A_1, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. La formule du n° 16 donnera, *puisque les mouvements sont uniformes,*

$$A_0A_1 = v_1t_1, \quad A_1A_2 = v_2t_2, \ldots, \quad A_{n-1}A_n = v_nt_n.$$

D'un autre côté, le second mobile doit parcourir uniformément l'espace A_0A_n, dans un temps égal à $t_1+t_2+\ldots+t_n$; la vitesse V de son mouvement, ou la *vitesse moyenne* cherchée, a donc pour valeur

$$V = \frac{A_0A_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n};$$

ou, ce qui est équivalent,

$$V = \frac{v_1t_1+v_2t_2+\ldots+v_nt_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n}.$$

On reconnaît, dans le second membre, une expression analogue à celle que donnerait la *règle de société* ou plutôt la *règle des moyennes. La vitesse moyenne* V, dans un mouvement composé de mouvements uniformes, *est donc égale à la moyenne des vitesses.*

21. *Définition de la vitesse.* — Considérons à présent un mouvement varié quelconque, et soient A, B, les positions occupées

par le mobile au bout des temps t, $t+\Delta t$. *Si l'on divise* la distance $AB=\Delta x$, c'est-à-dire l'*accroissement de l'espace*, par Δt, ou par l'*accroissement du temps, on aura la vitesse moyenne* relative à la partie AB de la trajectoire. Cette vitesse est celle d'*un mobile auxiliaire m* qui, partant du point A en même temps que le mobile M, arriverait avec celui-ci en B, après avoir parcouru uniformément la ligne AB. On comprend, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, que le mouvement du mobile auxiliaire différera d'autant moins du mouvement de l'autre mobile, que l'intervalle Δt sera plus petit. Pour cette raison, on appelle *vitesse du mobile* M, *au bout du temps t, la limite v vers laquelle tend sa vitesse moyenne* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, *lorsque les accroissements de l'espace et du temps convergent vers zéro.*



22. *Mesure de la vitesse.* — Si la *relation entre l'espace et le temps* est donnée sous la forme $x=f(t)$, on aura

$$v=\lim\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=\lim\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t);$$

donc *la vitesse, dans un mouvement varié quelconque, a pour mesure la dérivée de l'espace, par rapport au temps* (*).

Ainsi, dans les trois mouvements considérés ci-dessus, déterminés par les relations

$$x=t^2-3t+2,\quad x=\frac{1+t}{1+t^2},\quad x=\sin t,$$

les (**) vitesses sont, respectivement,

$$v=2t-3,\quad v=\frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)^2},\quad v=\cos t.$$

23. Un mouvement est dit *accéléré* ou *retardé*, suivant que sa vitesse augmente ou diminue avec le temps. Dans le premier des trois exemples précédents, le mouvement est sans cesse accéléré,

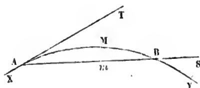
(*) Cet énoncé suppose que l'espace et le temps ont été remplacés par leurs mesures respectives, c'est-à-dire par des nombres.

(**) Pour abréger, on dit: *la vitesse*, au lieu de : *la mesure de la vitesse*. (*Voyez* la note du n° **12**.)

parce que la quantité $2t - 3$ augmente avec t. La discussion du deuxième exemple montre que, le temps croissant de $-\infty$ à $+\infty$, le mouvement est d'abord *retardé*, puis *accéléré*, puis de nouveau *retardé*, puis enfin *accéléré*. Quant à la formule $v = \cos t$, elle montre clairement que le mouvement est *périodique*, ce que nous savions déjà (17, 3°).

24. *Représentation graphique de la vitesse.* — De la formule $v = f'(t)$, on conclut immédiatement que *la vitesse est représentée, en grandeur et en signe, par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des espaces* (18). La construction de cette courbe fait donc connaître, non-seulement *la situation du mobile sur sa trajectoire* (18), mais encore *la vitesse dont il est animé actuellement, et le sens dans lequel il se meut*; de sorte que la discussion complète du mouvement d'un point dont la trajectoire est supposée connue, se réduit à un simple exercice graphique.

25. *Direction de la vitesse.* — Reprenons les hypothèses établies dans le n° 21, mais admettons que le *mobile auxiliaire m*, au lieu de parcourir l'arc AMB, décrive la corde AB. Sa vitesse, pour chacune des positions attribuées au point B, est dirigée suivant la sécante ABS, dont la limite est la tangente AT. Par conséquent, *la direction de la vitesse d'un point matériel est, à chaque instant, la direction de la tangente à la trajectoire* (*).



26. Problème. — *Connaissant la vitesse* (en fonction du temps), *trouver l'espace.*

Ce problème consiste évidemment à *remonter de la dérivée* $f'(t)$, *à la fonction primitive* $f(t)$ (*Alg.*, 227). Nous le résoudrons dans quelques cas simples.

(*) La considération du *mouvement suivant la corde* AB conduit à la mesure de la vitesse trouvée ci-dessus. En effet,

$$\frac{AB}{\Delta t} = \frac{\Delta x(1-\varepsilon)}{\Delta t} \quad (T.\ D.,\ 210);$$

donc

$$\lim \frac{AB}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = v.$$

1°. $v = \frac{t}{1+t^2}$. Cette formule donne

$$x = \frac{1}{2} l(1+t^2) + \text{const.}$$

Pour que le mouvement soit complétement déterminé, il faut que l'on connaisse un système de valeurs de x et de t. Si, par exemple, $x = 0$ *pour* $t = 0$, auquel cas *l'origine des espaces correspond à l'origine des temps*, la *constante arbitraire* est nulle, et

$$x = \frac{1}{2} l(1+t^2).$$

2°. $v = \sin 2t - \sin t$; d'où

$$x = -\frac{1}{2}\cos 2t + \cos t + \text{const.}$$

En supposant $t = 0$ pour $x = 0$, on trouve

$$x = 2\cos t \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Le mouvement est oscillatoire : la valeur de x varie entre -2 et $+\frac{1}{4}$; les maximums et les minimums de vitesse répondent à

$$\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}; \text{ etc.}$$

3°. $v = \frac{t^4+1}{t^6+1}$. On trouve (*Alg.*, 441)

$$x = \frac{1}{3}\text{arc tang}\frac{3t(1-t^2)}{t^4-4t^2+1},$$

en supposant encore que l'origine des espaces corresponde à l'origine des temps. Nous engageons le lecteur à faire la discussion de ces deux formules.

EXERCICES.

I. Étudier les mouvements définis par les équations

$$x = \frac{1}{3}\sin^3 t, \quad x = \frac{\sin t}{2+\cos t}, \quad x = \frac{t}{e^t - e^{-t}}, \quad x = \frac{t^3 - 7t + 6}{(t^2+1)^2};$$

construire, pour chacun d'eux, la courbe des espaces et la courbe des vitesses.

II. Mêmes questions pour les mouvements définis par les formules

$$v = \sin t + \sin 2t - \sin 3t, \quad v = \frac{t^2+1}{t^4+1},$$

$$v = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad v = \frac{1-t}{e^t}.$$

CHAPITRE IV.

DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

27. Après le mouvement uniforme, le plus aisé à étudier est le *mouvement uniformément varié,* dans lequel *la relation entre la vitesse et le temps* est

$$v = b + ct, \quad (1)$$

b et c étant des *constantes* données. De ces deux quantités, la première, égale à la valeur de v correspondant à $t = 0$, est appelée, pour cette raison, *vitesse initiale;* l'autre est l'*accélération,* c'est-à-dire *la quantité dont la vitesse augmente ou diminue dans l'unité de temps.*

28. *Remarques.* — I. *Quand la vitesse augmente avec le temps,* c'est-à-dire *quand l'accélération c est positive,* le mouvement est dit *uniformément accéléré;* dans le cas contraire, il est *uniformément retardé.*

II. Soient t_0, t_1 deux valeurs de t, et v_0, v_1 les valeurs correspondantes de v. On aura, par la formule (1),

$$v_1 - v_0 = c(t_1 - t_0),$$

ou

$$c = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}.$$

Ainsi, *dans tout mouvement uniformément varié, l'accélération est égale à l'accroissement de la vitesse, divisé par l'accroissement du temps.*

29. La formule (1) donne (26)

$$x = a + bt + \frac{1}{2}ct^2. \quad (2)$$

La constante arbitraire a est évidemment *l'arc de trajectoire compris entre la position initiale du mobile et l'origine des espaces.*

30. Si l'on compte les espaces à partir de cette position initiale, $a = 0$, et la formule (2) devient

$$x = bt + \frac{1}{2}ct^2. \quad (3)$$

31. Admettons, en outre, que *la vitesse initiale b soit nulle :* les équations (3) et (1) se réduiront à

$$x = \frac{1}{2}ct^2, \quad (A) \qquad v = ct. \quad (B)$$

Ces dernières formules mettent en évidence les propriétés suivantes, qui appartiennent à tout mouvement uniformément accéléré (*), quand l'origine des espaces se confond avec la position initiale du mobile, et que celui-ci n'a pas de vitesse initiale :

1°. *La vitesse acquise est proportionnelle au temps.*

2°. *L'espace parcouru est proportionnel au carré du temps.*

3°. *La vitesse acquise au bout de la première unité de temps est égale au double de l'espace parcouru pendant ce laps de temps.*

Pour vérifier cette troisième loi, il suffit d'observer que, si l'on fait $t = 1$ dans les formules (B), (A), elles donnent

$$v = c, \quad 2x = c.$$

Chute des corps pesants.

32. Les lois que nous venons d'énoncer sont celles qui président au mouvement des corps pesants ou *corps graves*, tombant dans le vide, sans vitesse initiale. L'accélération c, relative à ce cas naturel, est ordinairement représentée par la lettre g, initiale du mot

(*) Il est toujours permis de supposer que le mouvement auquel se rapportent ces deux formules est *accéléré;* en effet, on peut compter les espaces dans le sens de ce mouvement, et alors la constante c est positive.

gravité. On a trouvé $g = 9,808\,96$. En adoptant ce résultat de l'expérience, nous pouvons dire que : *un corps tombant librement dans le vide, sans vitesse initiale, parcourt, dans la première seconde de sa chute, un espace égal à* $4^m,904\,48$; *sa vitesse, à la fin de ce laps de temps, est égale* à $9^m,808\,96$ (*).

De plus, si h représente la hauteur d'où le corps est tombé, on aura, au lieu des formules (A), (B),

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad (C) \qquad v = gt. \quad (D)$$

33. En éliminant t entre ces deux équations, on obtient

$$h = \frac{v^2}{2g}, \quad (E)$$

ou

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (F)$$

Cette dernière formule donne *la vitesse* v DUE *à la hauteur* h : on voit que *la vitesse* DUE *croît proportionnellement à la racine carrée de la hauteur*. Ainsi, *quand les espaces parcourus par le corps qui tombe croissent comme les nombres* 1, 4, 9, 16, 25,... ; *les vitesses acquises croissent comme les nombres* 1, 2, 3, 4, 5,..., c'est-à-dire qu'*elles sont proportionnelles aux temps employés à parcourir ces espaces* (31).

34. Les relations (A) ou (C) donnent lieu à cette autre remarque : *les espaces que parcourt le corps pesant, en des temps consécutifs tous égaux entre eux, croissent comme les nombres* 1, 3, 5, 7,....

EXERCICES.

I. A n secondes d'intervalle, on a laissé tomber, du haut d'une tour, deux corps pesants. On demande à quel moment la distance qui les sépare sera b.

Réponse : $\left(\frac{b}{ng} - \frac{n}{2}\right)$ secondes après la chute du second corps.

II. Un projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a. On demande : 1° à quelle hauteur h il par-

(*) Ces nombres se rapportent à des observations faites au niveau de la mer, à la latitude de Paris.

viendra; 2° quel temps T il emploiera pour revenir au point de départ (*).

Résultat : $h = \frac{a^2}{2g}$, $T = \frac{2a}{g}$.

III. A n secondes d'intervalle, et dans la même direction verticale, on a lancé deux projectiles dont la vitesse initiale commune est a. On demande le temps t qu'emploiera le second projectile pour atteindre le premier.

Résultat : $t = \frac{a}{g} - \frac{n}{2}$.

IV. Comment doit-on modifier les formules

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2}gt^2,$$

si l'heure est prise pour unité de temps?

Réponse : $V = 3600\, g\theta$,
$h = 1800\, g\theta^2$ (**).

CHAPITRE V.

DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS ET DES VITESSES.

Composition des mouvements.

35. Ainsi que nous l'avons déjà dit (4), on juge qu'un corps M est en mouvement dans l'espace, quand il change de situation à l'égard de différents corps A, B, C,..., supposés fixes. Si cette fixité était réelle, le *mouvement relatif* de M ne différerait pas de son *mouvement absolu*. Mais, en général, les choses ne se passent pas de cette manière, et le mouvement absolu du corps M est une

(*) On admet que les formules du mouvement sont :

$$v = a - gt, \quad x = at - \frac{1}{2}gt^2.$$

(**) θ représente le temps, exprimé en heures.

combinaison de son mouvement relatif et du mouvement des corps A, B, C,...

Remarquons tout de suite que si, au lieu du mouvement absolu du système A, B, C,..., on considérait son mouvement à l'égard d'un second système A', B', C',..., la *composition des deux mouvements* donnerait, non le mouvement absolu de M, mais le mouvement de ce corps relativement au système A', B', C',..., pris comme point de repère. Si on voulait aller plus loin, on aurait à composer ce mouvement relatif avec le mouvement, absolu ou relatif, des corps A', B', C'; et ainsi de suite.

Par exemple, si une bille roule sur le pont d'un bateau, tandis que celui-ci est emporté par le courant d'une rivière, la composition de ces deux mouvements élémentaires donnera le mouvement de la bille par rapport au rivage. Il resterait, pour déterminer la trajectoire de la bille relativement au système solaire, *supposé fixe*, à composer les deux premiers mouvements avec la rotation et la translation de la terre.

36. L'exemple précédent prouve que les compositions de mouvements peuvent toujours être ramenées à la question suivante :

Connaissant le mouvement d'un corps M, *par rapport à différents corps* A, B, C,... ; *connaissant, en outre, le mouvement du système de ces derniers corps; trouver le mouvement absolu de* M.

La solution générale de ce problème reposant sur des considérations géométriques assez délicates, nous nous contenterons de traiter quelques cas particuliers très-simples.

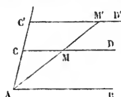
37. Composition de deux mouvements rectilignes uniformes. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une droite donnée, tandis que celle-ci a un mouvement de translation rectiligne et uniforme* (*). *Quel est le mouvement absolu du point* (**)?

Soient AB et A les positions initiales de la droite et du point; soient CD et M leurs positions au bout du temps quelconque t;

(*) Cette expression, *mouvement de translation rectiligne et uniforme*, signifie que tous les points de la droite décrivent, avec une même vitesse constante, des droites parallèles.

(**) Pour réaliser cette hypothèse, on pourrait faire glisser un *anneau* le long d'une *tringle*, tandis que l'on ferait mouvoir celle-ci.

soient enfin C'D' et M' leurs positions au bout du temps quelconque t'. Le mouvement de la droite donnée étant un mouvement de translation rectiligne, AB, CD, C'D' sont parallèles, et leurs extrémités A, C, C' sont en ligne droite. De plus, ce mouvement de translation est uniforme; donc (16)



$$\frac{AC}{AC'} = \frac{t}{t'}.$$

D'un autre côté, le mouvement *relatif* du point est uniforme; ainsi

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{t}{t'}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CM}{C'M'}.$$

Imaginons les droites AM, AM': elles détermineront deux triangles ACM, AC'M', semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc les angles CAM, C'A'M' sont égaux; et AMM' *est une ligne droite*. De plus,

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{AC}{AC'},$$

ou, par ce qui précède, $$\frac{AM}{AM'} = \frac{t}{t'}.$$

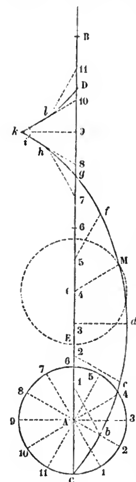
Ainsi, *le mouvement absolu du point matériel est rectiligne et uniforme*. En d'autres termes :

Le mouvement RÉSULTANT *de deux mouvements rectilignes et uniformes est également rectiligne et uniforme.*

38. COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS UNIFORMES, L'UN RECTILIGNE, L'AUTRE CIRCULAIRE. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante, une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci a un mouvement rectiligne uniforme. Quel est le mouvement absolu du point?*

Soient AC et C les positions initiales de la circonférence et du point; soient OM et M leurs positions au bout du temps quelcon-

que t; soit enfin B la position du centre de la circonférence au moment où le point mobile accomplit sa révolution. Puisque les deux mouvements composants sont uniformes, on aura, en appelant R le rayon OM,



$$\frac{AO}{AB} = \frac{\text{arc}\, EM}{2\pi R}.$$

Ainsi, *à chaque instant, le rayon* OM *fait, avec la direction* OA, *un angle proportionnel à cette droite.* Cette propriété définit la trajectoire CMkD (*).

Pour construire cette ligne par points, on divise, en un même nombre de parties égales, la droite AB et le cercle CA; puis, par les points de division de AB, on mène les droites $1b$, $2c$, $3d$,..., respectivement égales et parallèles aux rayons A1, A2, A3,...; après quoi l'on fait passer un trait continu par les points C, b, c, d....

39. *Remarque.* — Si le cercle et la droite n'étaient pas situés dans un même plan, la trajectoire CMkD deviendrait une *courbe à double courbure.* Dans le cas particulier où le cercle se mouvrait perpendiculairement à la droite, le point M décrirait une *hélice.*

40. Composition de deux mouvements circulaires uniformes. — *Un point matériel parcourt, avec une vitesse constante,*

(*) Si l'on rapporte cette courbe à la droite AB et à une perpendiculaire passant en A, les coordonnées du point M seront données par les deux formules

$$y = at - R\cos bt, \quad x = R\sin bt;$$

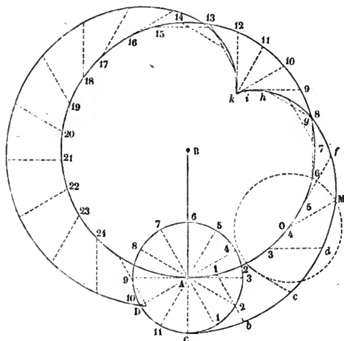
d'où

$$y = \frac{a}{b}\cdot \text{arc}\sin\frac{x}{R} - \sqrt{R^2 - x^2},$$

a et b étant *la vitesse de translation* du cercle et *la vitesse de rotation* du

une circonférence donnée, tandis que le centre de celle-ci décrit, uniformément, une seconde circonférence. Quel est le mouvement absolu du point?

Ce cas est à peu près réalisé dans le mouvement de la lune autour de la terre : il donne lieu à une construction qui ne diffère de la précédente que par le changement de la droite AOB en une circonférence AOB. On trouve ainsi, pour trajectoire du point, la courbe CcM*k*D.



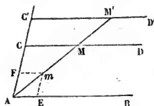
41. *Remarque.* — On peut démontrer que la *trajectoire du point* M *est une épicycloïde,* c'est-à-dire *la ligne engendrée par un point qui serait lié à un cercle roulant sur un cercle fixe* (*).

point M. Cette dernière équation a une grande analogie avec celle de la *cycloïde* (*D. D.*, 69); d'où l'on peut conclure que les deux courbes appartiennent à la même *famille:* en effet, *la trajectoire* CM*k*D *peut être engendrée par un point qui serait lié à un cercle roulant sur la droite* AB.

(*) Soient, en effet, *b* et *a* les vitesses angulaires du point matériel M

Composition des vitesses.

42. Reprenons l'exemple qui nous a servi à montrer la composition de deux mouvements rectilignes uniformes, et cherchons comment la vitesse du *mouvement résultant* est liée aux vitesses des *mouvements composants*.

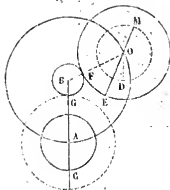


Soit, au bout de la première unité de temps, m la position du point matériel sur sa trajectoire rectiligne AMM', de telle sorte que Am représente la vitesse du mouvement résultant. Menons mF parallèle à la droite mobile AB et mE parallèle à la *trajectoire* ACC' *du point* A : les

---

et du centre mobile O, de manière que

$$\frac{\text{angle ABO}}{\text{angle DOM}} = \frac{a}{b}.$$



Des points O, B, pris comme centres, décrivons deux circonférences FE, FG, tangentes en F : la proposition énoncée ci-dessus se réduit à faire voir que l'on peut déterminer les rayons OF, BF par la condition

$$\text{arc FE} = \text{arc FG}.$$

Or, $\quad \text{arc FE} = \text{OF.angle FOE};$

$\text{arc FG} = \text{BF.angle FBG};$

donc l'on doit avoir

$$\frac{\text{OF}}{\text{BF}} = \frac{\text{FBG}}{\text{FOE}} = \frac{\text{ABO}}{\text{DOM} - \text{ABO}},$$

ou

$$\frac{\text{OF}}{\text{BF}} = \frac{a}{b-a}.$$

Par conséquent, si le cercle FOE roule, sans glissement, sur le cercle FBG, le point E viendra coïncider avec le point G ; et, en même temps, les points O, M coïncideront, respectivement, avec les points A, C.

On démontre, de la même manière, que la trajectoire construite ci-dessus (38) est une *cycloïde allongée* ou *accourcie*.

deux côtés AE, AF du parallélogramme AEmF représenteront, respectivement, la vitesse du point matériel, relativement à AB, et la vitesse de cette droite (*).

Ainsi, *la vitesse du mouvement rectiligne uniforme résultant de deux autres mouvements rectilignes uniformes, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses des mouvements composants.*

Cette proposition fondamentale est connue sous le nom de THÉORÈME DU PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.

43. *Remarques.* — I. Si l'on convient d'appeler *vitesses composantes* les vitesses des mouvements auxquels participe le point m, et *vitesse résultante* la vitesse de son mouvement effectif, on pourra simplifier ainsi l'énoncé précédent :

La vitesse résultante de deux vitesses données est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

II. On doit bien se garder de croire qu'*un point matériel peut être animé de plusieurs vitesses simultanées :* comme il décrit une seule trajectoire, il possède une seule vitesse.

44. *Polygone des vitesses.* — Nous avons vu (35) qu'après avoir cherché le mouvement résultant de deux mouvements simples, on peut combiner ce mouvement résultant avec un troisième mouvement simple, et ainsi de suite. De même, après avoir réduit deux vitesses à une seule, au moyen de la règle précédente, on peut composer, avec cette vitesse résultante, une troisième vitesse donnée, et ainsi de suite. L'application de cette règle permet donc de trouver la résultante d'un nombre quelconque de vitesses. Il est facile de voir que cette recherche se réduit, dans tous les cas, à la construction géométrique résultant du théorème suivant :

La résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un

(*) Cette dernière vitesse a été désignée, par Coriolis, sous le nom de *vitesse d'entraînement :* c'est la vitesse avec laquelle est *entraîné* le système auquel appartient le point matériel m. Les vitesses représentées par Am et AE sont, l'une, la *vitesse absolue* du point, l'autre, sa *vitesse relative*.

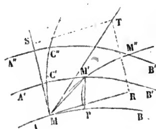
polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les vitesses composantes, en grandeur et en direction.

45. *Parallélipipède des vitesses.* — En particulier :

La vitesse résultante de trois vitesses, non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses composantes.

46. *Généralisation des théorèmes précédents.* — Ces théorèmes ont été obtenus en supposant que les mouvements composants étaient rectilignes et uniformes; mais cette restriction n'est pas nécessaire. Pour le faire voir, il suffit de considérer le cas de deux mouvements composants; car le *polygone des vitesses* est un corollaire du théorème fondamental.

Supposons donc qu'un point matériel parcoure une courbe quelconque, plane ou à double courbure, mobile dans l'espace. Soient AB, A'B', A"B",... diverses positions de cette ligne, et M, M', M",... les positions correspondantes du point. Soient t et $t+\Delta t$ les valeurs du temps, qui répondent aux positions M et M'.



Pendant le temps Δt, le point matériel a parcouru un certain arc MP de AB : le point P, situé sur cette ligne, a donc décrit lui-même, dans ce laps de temps, un certain arc M'P.

Cela posé, si nous menons les cordes MP, PM', M'M, nous aurons, dans le triangle MPM',

$$\frac{\text{MP}}{\sin \text{MM'P}} = \frac{\text{PM'}}{\sin \text{M'MP}} = \frac{\text{MM'}}{\sin \text{MPM'}},$$

ou

$$\frac{\frac{\text{MP}}{\Delta t}}{\sin \text{MM'P}} = \frac{\frac{\text{PM'}}{\Delta t}}{\sin \text{M'MP}} = \frac{\frac{\text{MM'}}{\Delta t}}{\sin \text{MPM'}};$$

puis, en passant à la limite et en menant les tangentes MR, MT, MS à la courbe mobile, à la trajectoire MM'M" et à la courbe MC'C"

décrite *par le point* M *de* AB :

$$\frac{\lim \frac{MP}{\Delta t}}{\sin TMS} = \frac{\lim \frac{PM'}{\Delta t}}{\sin TMR} = \frac{\lim \frac{MM'}{\Delta t}}{\sin RMS} \ (*).$$

Mais $\lim \frac{MP}{\Delta t} =$ *vitesse relative* $= v$,

$\lim \frac{PM'}{\Delta t} =$ *vitesse d'entraînement* $= v_1$,

$\lim \frac{MM'}{\Delta t} =$ *vitesse absolue* $= V$.

De plus, les tangentes MR, MS, MT, *situées dans le plan tangent à la surface décrite par la courbe mobile,* sont les directions des vitesses v, v_1, V (25). La relation précédente devient donc

$$\frac{v}{\sin(V, v_1)} = \frac{v_1}{\sin(V, v)} = \frac{V}{\sin(v, v_1)}.$$

Chacune des trois vitesses étant proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres, ces trois droites sont deux côtés et l'une des diagonales d'un parallélogramme, etc. (**).

Application de la théorie des coordonnées à la composition des vitesses.

47. *Point mobile projeté sur un axe fixe.* — Soit AB la trajectoire d'un point matériel. Soit M la position de ce point, au bout du temps quelconque t. Si l'on projette M sur un axe Ox, on pourra

(*) La trajectoire du point P se confond, à la limite, avec la courbure MCC'. Par conséquent, la corde PM' tend à se confondre, en direction, avec la tangente MS; et lim MM'P = TMS.

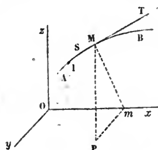
(**) Si l'on mène TR parallèle à SM et TS parallèle à RM, on aura

$$\frac{MR}{\sin(V, v_1)} = \frac{MS}{\sin(V, v)} = \frac{MT}{\sin(v, v_1)};$$

ou, par ce qui précède, $\frac{MR}{v} = \frac{MS}{v_1} = \frac{MT}{V}$.

Si donc la résultante V est représentée par MT, les vitesses composantes, v, v_1, seront représentées par MR et MS.

regarder la projection m comme étant la position occupée, au bout du temps t, par un second mobile qui parcourrait l'axe. Il existe, entre les vitesses V et v des deux mobiles, une relation très-simple, que l'on peut énoncer ainsi :



La vitesse de la projection est égale à la projection de la vitesse.

En effet, si s désigne l'arc IM décrit par le premier mobile, à partir d'une certaine origine I, on a d'abord (22)

$$V = s', \quad v = x'.$$

D'un autre côté, l'angle α formé par les directions des deux vitesses est donné (*T. D.*, 212) par la formule

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'}.$$

Donc $$v = V\cos\alpha.$$ C. Q. F. D. (*)

48. Soient $x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$

les équations de la trajectoire. Le théorème précédent, appliqué aux trois projections du point matériel M, donne, en désignant leurs vitesses par V_x, V_y, V_z :

$$V_x = V\cos\alpha, \quad V_y = V\cos\beta, \quad V_z = V\cos\gamma,$$

et $$V^2 = (V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2.$$

Ainsi, *quand un point mobile est projeté sur trois axes rectangulaires, le carré de sa vitesse est égal, à chaque instant, à la somme des carrés des vitesses des trois projections.*

49. *Remarque.* — Ce théorème ne diffère pas de celui du *parallélipipède des vitesses.* En effet, V_x, V_y et V_z peuvent être considérées comme les vitesses de trois mouvements simples, ainsi définis : 1° le point M se meut sur une droite parallèle à Ox ; 2° cette droite se meut dans un plan parallèle à xy, de manière que tous

(*) Pour plus de simplicité, nous avons considéré des projections orthogonales ; mais le théorème subsiste dans le cas où elles sont obliques.

ses points décrivent des parallèles à Oy; 3° tous les points de ce plan mobile décrivent des parallèles à Oz; etc.

50. *Composition et décomposition d'un nombre quelconque de vitesses.* — Soient, au bout du temps t, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vitesses des mouvements élémentaires auxquels participe le point matériel. Pour trouver la résultante V de toutes ces vitesses, on peut commencer par décomposer chacune d'elles parallèlement à trois axes rectangulaires : toutes les composantes parallèles à l'axe des x ont une résultante unique, égale à leur somme algébrique; et il en est de même pour les deux autres groupes de composantes. Conséquemment, si l'on désigne par A, B, C, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ les angles formés avec les trois axes par les directions de la vitesse V et des vitesses données, on aura

$$\left.\begin{aligned} V\cos A &= v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2 + \ldots + v_n\cos\alpha_n, \\ V\cos B &= v_1\cos\beta_1 + v_2\cos\beta_2 + \ldots + v_n\cos\beta_n, \\ V\cos C &= v_1\cos\gamma_1 + v_2\cos\gamma_2 + \ldots + v_n\cos\gamma_n; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ou, pour abréger,

$$V\cos A = \Sigma v\cos\alpha,$$
$$V\cos B = \Sigma v\cos\beta,$$
$$V\cos C = \Sigma v\cos\gamma;$$

puis

$$V^2 = (\Sigma v\cos\alpha)^2 + (\Sigma v\cos\beta)^2 + (\Sigma v\cos\gamma)^2. \quad (2)$$

51. *Remarques.* — I. Dans les équations (1) et (2), chaque vitesse peut être supposée positive : sa direction est complétement déterminée au moyen des cosinus des angles qu'elle fait avec les trois axes.

II. Si l'on développe l'équation (2), on trouve, en désignant par v et v' deux quelconques des vitesses données,

$$V^2 = \Sigma v^2 + 2\Sigma vv'\cos(v, v').$$

Ainsi, *le carré de la vitesse résultante est égal à la somme des carrés des vitesses composantes, plus deux fois la somme des produits deux à deux de ces composantes par le cosinus de l'angle formé par leurs directions.*

Des mouvements apparents.

52. Nous avons vu (36) comment on peut *trouver le mouvement absolu d'un corps* M, *connaissant son mouvement relatif, et*

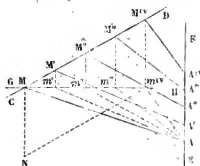
le mouvement absolu du corps A *auquel* M *est rapporté* (*). Au lieu de ce problème, on peut se proposer celui-ci, dont la solution renferme toute la théorie des *mouvements apparents :*

Connaissant les mouvements absolus de deux corps M *et* A, *trouver le mouvement relatif de* M.

Ce problème étant inverse du précédent, on le résoudra par les mêmes principes, appliqués dans un autre ordre. C'est ce que les exemples suivants vont mettre hors de doute.

53. Problème I. — *Un point matériel se meut sur une droite* CD, *avec une vitesse constante. Quel est son mouvement à l'égard d'un observateur qui se meut sur une droite* EF, *avec une vitesse constante ?*

Soient M et A, M' et A', M'' et A'',... les positions correspondantes des deux mobiles, au bout des temps o, t, $2t$, $3t$,.... Si l'observateur n'a pas la conscience de son mouvement propre, il lui semblera qu'il est immobile en A, et que le point matériel occupe, successivement, les positions M, m', m'',... déterminées par les parallélogrammes AA'M'm', AA''M''m'', AA'''M'''m''',.... (**). La ligne GH est donc la *trajectoire apparente* du point. D'ailleurs, les mouvements donnés étant uniformes, nous aurons, à cause des parallélogrammes,



$$\frac{MM'}{M'm'} = \frac{MM''}{M''m''} = \frac{MM'''}{M'''m'''} = \ldots$$

et $$Mm' = m'm'' = m''m''' = \ldots.$$

(*) Pour plus de simplicité, nous supposons les corps A, B, C,..., réduits à un seul.

(**) Quand l'observateur est arrivé en A', il voit le point dans la direction A'M'. On doit donc, pour avoir la position apparente du point, l'observateur étant supposé fixe, mener Am' égale et parallèle à A'M' : c'est ce que réalise le parallélogramme AA'M'm'.

Ainsi, le *mouvement apparent du point matériel est rectiligne et uniforme.*

54. *Remarques.* — I. Le mouvement absolu du point matériel peut, évidemment, être regardé comme un *mouvement composé* (37), résultant de son mouvement apparent et d'un autre mouvement rectiligne et uniforme, commun à tous les points de la trajectoire apparente GH, et égal au mouvement de l'observateur : *le mouvement apparent d'un corps n'est donc que son mouvement relatif, l'observateur étant pris pour point de repère.*

II. Menons la droite MN égale et parallèle $A^{IV}A$, et achevons le parallélogramme $MNm^{IV}M^{IV}$. La droite GH sera la diagonale de ce parallélogramme. Par conséquent,

Pour obtenir le mouvement apparent d'un point matériel, il suffit de composer son mouvement absolu, avec un mouvement égal et contraire à celui de l'observateur; ou, en termes plus simples :

Pour obtenir le mouvement apparent d'un point matériel, on imprime à ce point et à l'observateur un mouvement commun, égal et contraire à celui de l'observateur.

III. La composition des vitesses ne différant pas de la composition des mouvements, au moins quand ceux-ci sont rectilignes et uniformes, il s'ensuit que :

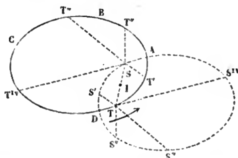
La vitesse apparente d'un point matériel est la résultante de sa vitesse absolue et d'une vitesse égale et parallèle à celle de l'observateur, mais dirigée en sens contraire.

55. PROBLÈME II. — *Trouver le mouvement apparent d'un point fixe* S, *pour un observateur* T *qui décrirait une ellipse ayant ce point pour foyer* (*).

Si l'observateur se croit immobile en T, le point fixe S lui semblera décrire une courbe $Ss's''$,..., que l'on obtiendra en menant Ts' égale et parallèle à T'S, Ts'' égale et parallèle à T''S, et ainsi de suite. Il est facile de voir que les deux courbes sont symétriques par rapport au milieu I de ST. Par suite, la trajectoire apparente est une ellipse égale à la première. En outre, *la vitesse apparente du point fixe est, à chaque instant, égale et parallèle à la vitesse*

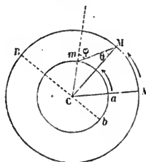
(*) Ce problème est celui du mouvement apparent du soleil. (*B., Cosmographie.*)

réelle de l'observateur; mais elle est dirigée en sens contraire de celle-ci.



56. Problème III. — *Deux points matériels*, M, *m*, *parcourent uniformément les circonférences* AMB, *amb*, *dont le centre commun est supposé fixe. Quel est le mouvement de l'un des mobiles relativement au rayon passant par l'autre* (*)?

Le mouvement de *m*, par rapport à un spectateur placé en M et prenant le centre C pour *point de repère*, dépend principalement de l'angle *m*MC : suivant que cet angle est dirigé *à droite* ou *à gauche* du rayon MC, *m* paraît se mouvoir dans le sens indiqué par la flèche, ou dans le sens opposé. De même, le *mouvement angulaire* apparent de M, pour un observateur qui se croirait immobile en *m*, est déterminé par l'angle M*m*C, ou par son supplément. Il s'agit donc d'examiner comment ces angles varient avec le temps.



A cet effet, soient : R, *r* les rayons des deux circonférences; Ω, ω les *vitesses angulaires* des mobiles; θ, l'angle formé par les *directions* MC, M*m*; φ, l'angle que fait la direction *m*M avec *le prolongement* du rayon C*m*. Supposons, pour fixer les idées, que les deux points se meuvent dans le même sens, auquel cas les vitesses Ω, ω pourront être regardées comme positives; supposons, en

(*) Les stations et rétrogradations des planètes donnent lieu à une application de ce problème. (*B.*, *Cosmographie.*)

outre, $\omega > \Omega$ (*). Enfin, comptons le temps t à partir d'une des époques pour lesquelles les rayons mobiles Cm, CM sont dirigés suivant une même droite CaA. Nous aurons

$$mCM = \omega t - \Omega t;$$

ou, en représentant par c la différence $\omega - \Omega$, laquelle est supposée positive,

$$mCM = ct.$$

Le triangle MCm donne ensuite

$$\sin\theta = \frac{r}{Mm}\sin ct, \quad \sin\varphi = \frac{R}{Mm}\sin ct,$$

$$Mm = +\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos ct}.$$

Pour simplifier, posons

$$\frac{r}{R} = n, \quad (1) \qquad l = +\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos ct}; \quad (2)$$

d'où $\quad \sin\theta = \frac{n}{l}\sin ct, \quad (3) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{l}\sin ct. \quad (4)$

Les formules (1), (2), (3), (4) servent à résoudre complétement le problème. Elles donnent lieu à une discussion intéressante, dont nous signalerons seulement les points principaux.

57. *Remarques.* — I. L'angle θ, d'abord nul, devient positif, puis nul, puis négatif, puis nul; après quoi les mêmes circonstances se reproduisent périodiquement.

II. L'angle φ, *toujours égal* à $\theta + ct$ (**), n'est jamais négatif: il n'a pas de limite supérieure.

III. La quantité l, égale à $\frac{Mm}{MC}$, varie entre $1 - n$ et $1 + n$. Elle atteint son minimum au moment des *conjonctions* (A, a), et son maximum lors des *oppositions* (B, b) (***).

IV. La vitesse angulaire *relative* de m est égale à la dérivée de θ,

(*) C'est ce qui a lieu pour les planètes.

(**) Cela se vérifie aisément.

(***) Ces expressions, empruntées à l'Astronomie, se rapportent à un spectateur qui serait placé sur le soleil.

prise par rapport à t. Or, les formules (2), (3) donnent

$$l' = \frac{nc \sin ct}{l}, \quad \theta' \cos\theta = n \frac{lc \cos ct - l' \sin ct}{l^2},$$

$$\cos\theta = + \frac{1 - n \cos ct}{l} \quad (*),$$

donc

$$\theta' = \frac{nc}{l^2}(\cos ct - n). \quad (5)$$

D'après cette valeur, le mouvement apparent de m sera *direct* ou *rétrograde*, suivant que la différence $\cos ct - n$ sera positive ou négative : il y aura *station* au moment où $\cos ct = n$.

V. Un calcul semblable au précédent conduit à la formule

$$\varphi' = \frac{c}{l^2}(1 - n \cos ct) : \quad (6)\ (**)$$

à cause de $n < 1$, on a $\varphi' > 0$; donc l'angle φ croît sans cesse, comme nous l'avons dit tout à l'heure.

CHAPITRE VI.

DE L'ACCÉLÉRATION.

Mouvement rectiligne.

58. *Accélération moyenne.* — Afin de suivre la même marche que dans le Chapitre III, nous commencerons par résoudre la question suivante, analogue à celle qui nous a donné la définition de la *vitesse moyenne* (20) :

Dans un mouvement composé de mouvements uniformément variés, les accélérations ont été

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \ldots, \quad w_n$$

pendant les temps $t_1, \quad t_2, \quad t_3, \ldots, \quad t_n$;

(*) La droite Mm étant intérieure au cercle AMB, on a nécessairement $\cos\theta > 0$.

(**) On arrive plus rapidement à ce résultat si l'on fait attention que $\varphi' = \theta' + c$ (*Remarque II*).

quelle sera l'accélération W *d'un mouvement uniformément varié qui durerait pendant le temps*

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n,$$

et dont les vitesses initiale et finale seraient les mêmes que dans le premier mouvement?

Dans le premier mouvement, les accroissements de vitesse ont été

$$w_1 t_1, \quad w_2 t_2, \ldots, \quad w_n t_n,$$

pendant les temps $t_1, \quad t_2, \ldots, \quad t_n$. (27)

L'accroissement total est donc

$$w_1 t_1 + w_2 t_2 + \ldots + w_n t_n;$$

et comme il doit être égal à

$$W(t_1 + t_2 + \ldots + t_n),$$

on a

$$W = \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2 + \ldots + w_n t_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}.$$

Cette formule, analogue à celle du n° 20, apprend que : *l'accélération moyenne* W, dans un mouvement composé de mouvements rectilignes uniformément variés, *est égale à la moyenne des accélérations.*

59. *Définition et mesure de l'accélération.* — Des raisonnements tout à fait semblables à ceux dont on a fait usage dans les n^os^ **21** et **22** conduisent aux propositions suivantes :

1°. *Dans un mouvement rectiligne quelconque, l'accélération de la vitesse v, au bout du temps t, est la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne* $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, *lorsque les accroissements de vitesse et de temps convergent vers zéro;*

2°. *L'accélération, dans un mouvement rectiligne quelconque, a pour mesure la dérivée de la vitesse ou la seconde dérivée de l'espace, par rapport au temps;*

3°. *La vitesse augmente ou diminue, suivant que l'accélération est positive ou négative.*

60. *Représentation graphique de l'accélération.* — L'accélération se déduisant de la vitesse comme celle-ci se déduit de l'espace,

il s'ensuit que *le coefficient angulaire de la courbe des vitesses* (*), *représente l'accélération, en grandeur et en signe.*

61. *Autre interprétation géométrique de l'accélération.* — La formule

$$\rho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}},$$

qui donne le rayon du cercle osculateur d'une courbe quelconque (*T. D.*, 219), se réduit, dans le cas d'une courbe plane, à

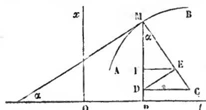
$$\rho = \frac{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}{x''};$$

ainsi qu'on le reconnaît aisément (**). Si cette courbe est celle des espaces, on a

$$x' = v, \quad x'' = w;$$

par conséquent,
$$w = \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha},$$

α étant l'angle que fait la tangente MT avec l'axe des abscisses. Cette formule conduit à la construction suivante :



MC *étant le rayon du cercle osculateur, menez* CD *perpendiculaire à l'ordonnée* MP, *puis* DE *perpendiculaire à* MC, *puis enfin* EF *perpendiculaire à* MP : MF *représente l'inverse de l'accélération* (***).

62. Problème. — *Connaissant l'accélération* (en fonction du temps), *trouver la vitesse et l'espace.*

(*) C'est-à-dire la courbe dont l'équation est $v = \varphi(t)$.

(**) Il suffit de supposer, dans le cas général, $y = 0$, $x = f(t)$, $z = t$.

(***) Il est bon d'observer que, *l'accélération étant une longueur*, la formule ci-dessus n'est pas homogène. Pour rétablir l'homogénéité, on multipliera le numérateur par le carré l^2 de la longueur qui avait été prise pour unité, et l'on aura $w = \frac{l^2}{\text{MF}}$, en sorte que *l'accélération est une troisième proportionnelle à* MF *et à* l.

Chacune des deux parties de ce problème exige que l'on remonte d'une dérivée à la fonction primitive (25).

Soit, par exemple,

$$w = 2\sin t - \sin 2t.$$

On aura
$$v = -2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + c,$$

$$x = -2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + ct + c',$$

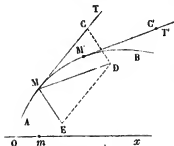
c et c' étant les constantes arbitraires. Si le mobile est parti sans vitesse initiale, et qu'en outre l'origine des espaces corresponde à l'origine des temps, $c = \frac{3}{2}$, $c' = 0$; donc

$$v = \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\,(^*), \quad x = -2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2t.$$

63. *Remarque.* — D'après la théorie des quadratures (*D. D.*, 342) *l'aire de la courbe des accélérations représente la vitesse, et l'aire de la courbe des vitesses représente l'espace.*

Mouvement curviligne.

64. *Définition de l'accélération totale.* — Soient M, M′ les positions occupées par le point matériel, sur sa trajectoire AB, aux *époques* t, $t + \Delta t$; soient $MC = v$, $M'C' = v + \Delta v$ les vitesses correspondantes, dirigées suivant les tangentes MT, M′T′. Si l'on mène MD égale et parallèle à M′C′, et qu'on achève le parallélogramme MCDE, on pourra regarder la vitesse représentée par MD, comme la résultante de la vitesse v et d'une autre vitesse représentée par ME. Si la trajectoire AB devenait rectiligne, on aurait



$$MD = MC + ME, \quad \text{ou} \quad ME = \Delta v:$$

(*) On peut écrire, plus simplement, $v = 4\sin^4 \frac{1}{2} t$.

pour cette raison, la composante ME est considérée comme *l'accroissement de vitesse qui a lieu pendant le temps* Δt. Par suite, on appelle *accélération moyenne*, durant ce même intervalle de temps, le rapport $\frac{ME}{\Delta t}$, et *accélération totale*, à l'époque t, *la limite de l'accélération moyenne, ou la limite vers laquelle tend le rapport entre l'accroissement de la vitesse et l'accroissement du temps*, lorsque ces deux accroissements convergent vers zéro : la *direction de l'accélération totale* est la limite vers laquelle tend la direction ME de l'accélération moyenne. Cette direction-limite est évidemment située dans le *plan osculateur, en* M, à la trajectoire (*T. D.*, 213).

65. Théorème I. — *L'accélération de la projection est égale à la projection de l'accélération.*

Soit, comme dans le n° 47, m la projection du mobile M sur un axe quelconque Ox. Représentons par α l'angle de MT avec cet axe. Nous aurons, par le principe des projections,

$$\text{proj MD} = \text{proj ME} + \text{proj ED}.$$

Or, $\text{proj ME} = \text{ME} \cos(\text{ME, OX}), \quad \text{proj ED} = v \cos\alpha,$

$$\text{proj MD} = \text{proj M'C'} = v\cos\alpha + \Delta(v\cos\alpha);$$

donc, en réduisant et en divisant par Δt :

$$\frac{\Delta(v\cos\alpha)}{\Delta t} = \frac{\text{ME}}{\Delta t}\cos(\text{ME, O}x).$$

La limite du premier membre est la dérivée de $v\cos\alpha$, dérivée que nous pouvons représenter par $(v\cos\alpha)'$. La limite de $\frac{\text{ME}}{\Delta t}$ est *l'accélération totale* w (64). Enfin, cos (ME, Ox) a pour limite $\cos l$, l étant l'angle de w avec Ox. L'égalité précédente donne donc

$$(v\cos\alpha)' = w\cos l. \quad (1)$$

Cette relation fondamentale équivaut au théorème énoncé ; car, $v\cos\alpha$ représentant la vitesse de la projection m (47), $(v\cos\alpha)'$ en est l'accélération ; et, d'un autre côté, $w\cos l$ est la projection de l'accélération totale.

66. Théorème II. — *L'accélération d'un mouvement résultant est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles*

aux droites qui représentent les accélérations des mouvements composants, en grandeur et en direction.

Soient, au bout du temps t, v_1, v_2,..., v_n les vitesses des mouvements composants, w_1, w_2, ..., w_n les accélérations correspondantes. Soient V la vitesse du mouvement résultant, et W l'accélération correspondante. Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que *la projection de l'accélération résultante* W, *sur un axe quelconque, est égale à la somme des projections des accélérations composantes* (*D. D.*, 82).

Or, l'équation (1), appliquée aux différents mouvements composants, donne

$$\Sigma (v \cos\alpha)' = \Sigma\, w \cos l.$$

Soit A l'angle formé avec l'axe par la vitesse résultante V : on a (50)

$$\Sigma (v \cos\alpha) = \mathrm{V} \cos \mathrm{A} ;$$

et, par la théorie des dérivées (*Alg.*, 185),

$$\Sigma (v \cos\alpha)' = (\mathrm{V} \cos \mathrm{A})'.$$

Enfin, en désignant par L l'angle de W avec Ox, on a aussi (Théorème I),

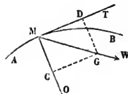
$$(\mathrm{V} \cos \mathrm{A})' = \mathrm{W} \cos \mathrm{L}.$$

Donc
$$\mathrm{W} \cos \mathrm{L} = \Sigma\, w \cos l. \quad (2)$$

Corollaire. — *Les accélérations se composent et se décomposent comme les vitesses.*

Accélération tangentielle et accélération centripète.

67. Pour appliquer les principes précédents, proposons-nous de décomposer l'accélération totale w, représentée par MG, en deux autres accélérations, l'une dirigée suivant la tangente MT à la trajectoire, l'autre dirigée suivant *la normale située dans le plan osculateur,* c'est-à-dire suivant *le rayon* MO *du cercle osculateur* (*). Ces deux composantes de



(*) On ne doit pas oublier que la droite MG est dans le plan osculateur.

l'accélération totale sont ce qu'on appelle l'*accélération tangentielle* et l'*accélération centripète*.

Désignons par α, β, γ et par l, m, n les angles que font les directions MT et MG avec trois axes rectangulaires. Nous aurons (65)

$$w\cos l = (v\cos\alpha)',\quad w\cos m = (v\cos\beta)',\quad w\cos n = (v\cos\gamma)';$$

ou

$$\left.\begin{aligned} w\cos l &= v'\cos\alpha + v(\cos\alpha)',\\ w\cos m &= v'\cos\beta + v(\cos\beta)',\\ w\cos n &= v'\cos\gamma + v(\cos\gamma)'.\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Mais λ, μ, ν étant les angles formés avec les trois axes par le rayon $MO = \rho$, nous avons encore (*T. D.*, 220) :

$$\frac{(\cos\alpha)'}{\cos\lambda} = \frac{(\cos\beta)'}{\cos\mu} = \frac{(\cos\gamma)'}{\cos\nu} = \frac{s'}{\rho} = \frac{v}{\rho}. \ (*)$$

On peut donc écrire, au lieu des équations ci-dessus :

$$\left.\begin{aligned} w\cos l &= v'\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\lambda,\\ w\cos m &= v'\cos\beta + \frac{v^2}{\rho}\cos\mu,\\ w\cos n &= v'\cos\gamma + \frac{v^2}{\rho}\cos\nu.\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

D'après ces dernières relations, *l'accélération tangentielle* T *et l'accélération centripète* C ont pour valeurs :

$$T = v' = s'',\quad C = \frac{v^2}{\rho}. \quad (5)\ (**)$$

En même temps, $\quad w^2 = T^2 + C^2. \quad (6)$

Ainsi : 1° *l'accélération tangentielle a pour mesure la dérivée*

(*) La vitesse v est égale à la dérivée s' de l'espace parcouru (**22**).

(**) Si l'on fait coïncider l'axe des x, successivement, avec MT et avec MO, on trouve, en effet,

$$w\cos GMT = MD = v',$$

$$w\cos MGO = MC = \frac{v^2}{\rho}.$$

de la vitesse ou la seconde dérivée de l'espace, par rapport au temps; 2° l'accélération centripète a pour mesure le carré de la vitesse, divisé par le rayon du cercle osculateur; 3° l'accélération totale est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du rectangle construit sur les droites qui représentent l'accélération tangentielle et l'accélération centripète, en grandeur et en direction.

68. Remarques. — I. *Si le mouvement curviligne est uniforme, il n'y a plus d'accélération tangentielle, et l'accélération totale, qui se réduit à l'accélération centripète, est proportionnelle à l'inverse du rayon de courbure.*

II. *Si le mouvement uniforme est circulaire, l'accélération centripète est constante.*

CHAPITRE VII.

APPLICATIONS.

69. Problème I. — *Un point matériel décrit une hélice tracee sur un cylindre vertical. La projection du point, sur l'axe de l'hélice, se meut conformément à la loi de la chute des corps pesants. Quel est le mouvement du point?*

1°. En faisant passer l'axe des x par la position initiale du mobile, et en comptant les ordonnées dans le sens de la pesanteur, nous pourrons prendre, pour équations de l'hélice,

$$x = \mathrm{R}\cos\frac{z}{\mathrm{R}},\quad y = \mathrm{R}\sin\frac{z}{\mathrm{R}}. \quad (1)\ (*)$$

En même temps, si le point est parti sans vitesse initiale,

$$z = \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

2°. Ces équations donnent, pour les composantes de la vitesse et

(*) Nous supposons toujours, pour plus de simplicité, que la tangente à l'hélice fait, avec l'axe, un angle de 45°.

de l'accélération totale,

$$x' = -gt \sin\frac{z}{R}, \quad y' = -gt \cos\frac{z}{R}, \quad z' = gt. \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -g\left(\sin\frac{z}{R} + \frac{g}{R} t^2 \cos\frac{z}{R}\right), \\ y'' &= \quad g\left(\cos\frac{z}{R} - \frac{g}{R} t^2 \sin\frac{z}{R}\right), \\ z'' &= g. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Par suite,

$$v = gt\sqrt{2}, \quad w = g\sqrt{2 + \frac{g^2}{R^2} t^4}. \quad (5)$$

La vitesse v étant proportionnelle au temps, *le mouvement est uniformément accéléré.*

3°. L'accélération tangentielle a pour valeur (67)

$$T = g\sqrt{2}. \quad (6)$$

Donc l'accélération centripète sera

$$C = \sqrt{w^2 - T^2} = \frac{g^2}{R} t^2. \quad (7)$$

Si l'on égale cette dernière expression à $\frac{v^2}{\rho}$, on trouve

$$\rho = 2R. \quad (8)$$

Ainsi, dans l'hélice considérée, le rayon de courbure est égal au diamètre du cylindre. C'est ce que l'on savait (page 102).

4°. La direction de l'accélération totale est déterminée par les formules

$$\cos l = \frac{x''}{w}, \quad \cos m = \frac{y''}{w}, \quad \cos n = \frac{z''}{w}.$$

5°. A l'origine du mouvement, les valeurs de ces cosinus sont

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}};$$

donc *l'accélération totale est d'abord dirigée suivant la tangente a la trajectoire : l'accélération centripète est nulle* (*).

(*) Les formules (6), (7) donnent le même résultat.

6°. A mesure que t augmente, $\cos u$ diminue; donc *l'accélération totale tend à devenir perpendiculaire à l'axe de l'hélice.*

70. Problème II. — *Un cercle* O *roule, avec une vitesse constante, sur une droite* Ax. *Quelles sont les circonstances du mouvement d'un point* M *intérieur à ce cercle?*

1°. Un calcul semblable à celui que l'on fait pour trouver l'équation de la cycloïde (*D. D.*, 69) donne

$$x = \mathrm{R}\omega - d\sin\omega, \quad y = \mathrm{R} - d\cos\omega, \quad (1)$$

$$x = \mathrm{R}\arccos\frac{\mathrm{R}-y}{d} \mp \sqrt{d^2 - (\mathrm{R}-y)^2}. \quad (2)$$

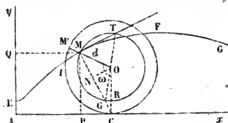
Cette dernière équation représente *la cycloïde accourcie* décrite par le point M.

2°. Si a est la *vitesse de roulement*, et que le temps t soit compté à partir de l'époque où l'extrémité M' du rayon OM coïncidait avec l'origine A,

$$\mathrm{R}\omega = at. \quad (3)$$

Donc $$x = at - d\sin\frac{at}{\mathrm{R}}, \quad y = \mathrm{R} - d\cos\frac{at}{\mathrm{R}} \quad (4)$$

sont les équations qui déterminent les mouvements des points P et Q, projections de M. Elles montrent que le mouvement proposé résulte du mouvement rectiligne et uniforme du centre O, combiné avec un mouvement circulaire et uniforme (38).



3°. On tire, de ces mêmes équations,

$$x' = a - \frac{ad}{\mathrm{R}}\cos\frac{at}{\mathrm{R}}, \quad y' = \frac{ad}{\mathrm{R}}\sin\frac{at}{\mathrm{R}}, \quad (5)$$

$$x'' = \frac{a^2 d}{\mathrm{R}^2}\sin\frac{at}{\mathrm{R}}, \quad y'' = \frac{a^2 d}{\mathrm{R}^2}\cos\frac{at}{\mathrm{R}}; \quad (6)$$

puis $$v^2 = a^2\left(1 + \frac{d^2}{R^2} - 2\frac{d}{R}\cos\frac{at}{R}\right), \quad w = \frac{a^2 d}{R^2}. \quad (7)$$

Ainsi, *l'accélération totale est constante.*

4°. Les formules (5) peuvent être remplacées par

$$x' = \frac{a}{R}y = \frac{a}{R}\text{PM}, \quad y' = (\text{AC} - \text{AP}) = \frac{a}{R}\text{PC}.$$

Conséquemment $$\frac{y'}{x'} = \frac{\text{PC}}{\text{PM}};$$

ou, en désignant par α l'angle que fait, avec Ax, la tangente MT à la trajectoire,

$$\tang\alpha = \frac{\text{PC}}{\text{PM}} = \tang\text{PMC}.$$

D'après cette dernière relation : 1° *la droite* MC *qui joint le point décrivant* M *au point de contact* C *est normale à la cycloïde ;* 2° *la tangente* MT *passe par l'extrémité* T *du diamètre mené au point d'intersection de la normale avec la circonférence* OMG.

5°. La transformation précédente, appliquée à la vitesse v, donne

$$v = \frac{a}{R}\text{MC}. \quad (8)$$

Ainsi, *la vitesse est proportionnelle à la normale.*

6°. La valeur de v^2 donne

$$vv' = \frac{a^3 d}{R^2}\sin\frac{at}{R} = \frac{a^3}{R^2}\text{PC};$$

puis $$\text{T} = v' = \frac{a^2}{R}\sin\alpha = \frac{a^2}{R^2}\cdot\text{ON}. \quad (9)$$

L'accélération tangentielle est donc *proportionnelle à la distance comprise entre le centre du cercle et la normale : elle atteint son maximum quand le mobile coïncide avec le point d'inflexion* I *de l'épicycloïde* (*).

(*) La règle ordinaire (*D. D.*, **149**) prouve que, pour ce point,

$$\cos\omega = \frac{d}{R}.$$

Par conséquent, *la normale au point d'inflexion est tangente au cercle* MGO.

7°. Quant à l'accélération centripète, évidemment dirigée suivant la normale MC ou suivant son prolongement, elle a pour valeur

$$C = \frac{a^2}{R^2}\sqrt{d^2 - R^2 \sin^2\alpha};$$

ou, en faisant attention que le radical représente la projection MN du rayon MO sur la normale MC,

$$C = \frac{a^2}{R^2}MN. \quad (10)$$

Au point d'inflexion I, MN = o; donc C = o.

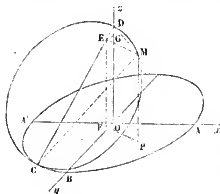
8°. Nous avons trouvé $\rho = \frac{a}{c}$ MC. Par conséquent

$$\rho = \frac{\overline{MC}^2}{MN}. \quad (11)$$

Ainsi, *le rayon du cercle osculateur de la cycloïde est une troisième proportionnelle à la projection* MN *du rayon* MO *et à la normale* MC (*).

9°. Les composantes T et C étant proportionnelles à MN et ON, il s'ensuit que *l'accélération totale est dirigée vers le centre du cercle mobile.* Cette conséquence résulterait aussi des formules (6).

71. Problème III. — *Une circonférence* CMD *roule sur une circonférence égale* ABA', *supposée fixe, en rencontrant constamment l'axe* OZ *de celle-ci. Quel est le mouvement d'un point de la première circonférence?*



Faisons passer l'axe des x par la position initiale A du point M. Menons OC, CD, MC et MD. Abaissons ME, EG, EF, respectivement perpendiculaires à CD, OZ,

(*) Dans le cas de la cycloïde simple, $d = R$, $MN = \frac{1}{2}MC$; donc

$$\rho = 2MC.$$

OC. Menons encore l'ordonnée MP, puis la droite FP, évidemment parallèle et égale à EM. En prenant pour unité la *vitesse de roulement,* nous aurons, comme on le voit aisément,

$$\mathrm{ME} = \mathrm{R}\sin t, \qquad \mathrm{DE} = \mathrm{R}(1+\cos t),$$

$$\mathrm{CE} = (1-\cos t), \quad \mathrm{OF} = \mathrm{GE} = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1+\cos t);$$

puis

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{OF}\cos t + \mathrm{FP}\sin t = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1+\cos t)(2-\cos t),\\ y &= \mathrm{OF}\sin t - \mathrm{FP}\cos t = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos t)\sin t,\\ z &= \mathrm{CE}\sin\frac{\pi}{3} \qquad\quad = \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3(1-\cos t)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

72. Ces valeurs, qui pourraient servir à construire par points la trajectoire (*), donnent

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-1+2\cos t)\sin t,\\ y' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos t)(1+2\cos t),\\ z' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3}.\sin t; \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-2-\cos t+4\cos^2 t),\\ y'' &= \frac{1}{2}\mathrm{R}(-1+4\cos t)\sin t,\\ z'' &= \frac{1}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}.\cos t; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$v^2 = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2(1-\cos t)(5+3\cos t), \quad (4)$$

$$w^2 = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2(5-4\cos t+3\cos^2 t); \quad (5)$$

(*) Cette trajectoire est une *épicycloïde sphérique*. Sa projection, sur le plan des xy, est un *limaçon de Pascal*, que l'on peut représenter par

$$u = \frac{1}{2}\mathrm{R}(1-\cos\omega).$$

$$T = \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{(1+3\cos t)\cos\frac{1}{2}t}{\sqrt{5+3\cos t}}, \quad (6)$$

$$C = R\sqrt{6}\frac{\sin\frac{1}{2}t\sqrt{2+\cos t}}{\sqrt{5+3\cos t}}; \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\lambda}{1-2\cos t-2\cos^2 t} &= \frac{\cos\mu}{-2\sin t(1+\cos t)} = \frac{\cos\nu}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2+\cos t}}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\rho = \frac{v^2}{C} = \frac{R}{2\sqrt{6}}\sin\frac{1}{2}t\,\frac{(5+3\cos t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2+\cos t}}. \quad (9)$$

73. Plusieurs circonstances intéressantes ressortent des dernières équations :

1°. La vitesse v, nulle pour $t=0$, augmente jusqu'à ce que l'on ait $\cos t = -\frac{1}{3}$, après quoi elle diminue. Le minimum répond à $\cos\frac{1}{2}t = 0$, ou $t=\pi$. A ce moment, le point matériel est en D, à la rencontre de la circonférence mobile et de l'axe directeur. De $t=\pi$ à $t=2\pi$, la vitesse repasse par les valeurs qu'elle avait acquises antérieurement.

2°. L'accélération w, d'abord égale à R, diminue jusqu'à ce que $\cos t = \frac{2}{3}$: le minimum est $R\sqrt{\frac{11}{12}}$. Elle augmente ensuite, de manière à atteindre son maximum $R\sqrt{3}$, lorsque $t=\pi$, etc.

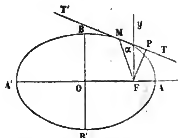
3°. Pour $t=0$, les relations (8) se réduisent à

$$\frac{\cos\lambda}{-3} = \frac{\cos\mu}{0} = \frac{\cos\nu}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} :$$

l'accélération centripète C, égale à zéro, est dirigée suivant AD. Au point D, qui répond à $t=\pi$, cette accélération atteint son maximum $R\sqrt{3}$; elle est alors dirigée suivant la perpendiculaire à DA, etc. (*).

(*) Nous engageons le lecteur à compléter cette discussion, pour laquelle nous devons nous borner à de simples indications.

74. Problème IV. — *Un point matériel* M *parcourt une ellipse* ABA′B′, *de manière que le rayon vecteur mené au foyer* F *décrit des aires proportionnelles aux temps. Quelles sont les circonstances du mouvement* (*).



Nous adopterons les dénominations et les notations suivantes :

rayon vecteur $= \mathrm{FM} = r$, *demi grand axe* $= \mathrm{OA} = a$,

demi petit axe $= \mathrm{OB} = b$, *excentricité* $= \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$,

anomalie vraie $=$ *angle* $\mathrm{AMF} = \omega$, *durée de la révolution* $= \mathrm{T}$,

vitesse moyenne angulaire $= \dfrac{2\pi}{\mathrm{T}} = n$, *aire* $\mathrm{AMF} = \mathrm{A}$.

L'énoncé donne (*D. D.*, 350) :

1°. $$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\omega}; \quad (1)$$

2°. $$\frac{\mathrm{A}}{\pi ab} = \frac{t}{\mathrm{T}},$$

ou $$\mathrm{A} = \frac{1}{2} na^2 t\sqrt{1 - e^2}. \quad (2)$$

75. Pour simplifier la valeur de A, on représente par $\frac{1}{2}c$ *l'aire décrite dans l'unité de temps,* c'est-à-dire que l'on pose

$$c = na^2\sqrt{1 - e^2}; \quad (3)$$

(*) Les données de ce problème constituent les deux premières *lois de Kepler*. Le problème lui-même est celui que Newton s'est proposé, et d'où il a conclu l'admirable principe de la *gravitation universelle*. (*B.*, *Cosmographie*.)

d'où $A = \frac{1}{2} ct.$ (4)

76. L'aire A, considérée comme une fonction du temps, a pour dérivée $\frac{1}{2} r^2 \omega'$ (*).

Donc, à cause de la formule (4) :

$$\omega' = \frac{c}{r^2}. \quad (5)$$

77. Rapportons l'ellipse à des axes rectangulaires, passant par le foyer ; nous aurons

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega.$$

Ces valeurs donnent, en vertu de la formule (5),

$$x' = r'\cos\omega - \frac{c}{r}\sin\omega, \quad y' = r'\sin\omega + \frac{c}{r}\cos\omega; \quad (6)$$

$$x'' = \left(r'' - \frac{c^2}{r^3}\right)\cos\omega, \quad y'' = \left(r'' - \frac{c^2}{r^3}\right)\sin\omega. \quad (7)$$

Par suite, $v^2 = r'^2 + \frac{c^2}{r^2}$, (8) $\quad w = r'' - \frac{c^2}{r^3}$. (9)

78. Il reste à remplacer r' et r'' par leurs valeurs, exprimées en fonction de r (**) ; mais, dès à présent, la comparaison des formules (9) et (7) montre que *l'accélération w est dirigée suivant le rayon vecteur.*

(*) En raisonnant comme dans le Chapitre XXI de la *Géométrie analytique à deux dimensions,* on trouve

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} < \frac{\Delta A}{\Delta t} < \frac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

$$\lim \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta A}{\Delta t}; \text{ etc.}$$

(**) D'après la marche indiquée au commencement de ce chapitre et dans les problèmes précédents, on pourrait se proposer d'évaluer v et w en fonction du temps, ou du moins en fonction de l'anomalie vraie ; mais, ainsi que le lecteur peut s'en convaincre, le premier problème est à peu près *insoluble,* et le second conduit à des valeurs compliquées, qui déguisent complétement la grande découverte de Newton.

79. Si l'on écrit ainsi l'équation (1) :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\omega}{a(1-e^2)},$$

et qu'on prenne ensuite les dérivées des deux membres, relatives à t, on trouve, à cause des formules (5) et (3),

$$r' = \frac{nae\sin\omega}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Mais

$$e\sin\omega = \sqrt{e^2 - \left[\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right]^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2};$$

donc $$r' = \frac{na}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}. \quad (10)$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (8), donne, après quelques réductions,

$$v^2 = n^2a^3\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Soit $$n^2a^3 = 4\pi^2\frac{a^3}{T} = \mu \text{ (*)};$$

alors $$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (11)$$

80. En comparant les deux valeurs de v^2, on a

$$r'^2 + \frac{c^2}{r^2} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right);$$

puis, en prenant les dérivées,

$$r'' - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{r^2}{\mu}.$$

Le premier membre est précisément la valeur de w; donc

$$w = -\frac{r^2}{\mu}. \quad (12)$$

(*) *La constante* μ *est la même pour toutes les planètes*, à cause de la troisième loi de Kepler : *les carrés des temps des révolutions sont comme les cubes des demi grands axes des orbites.*

Ainsi, *l'accélération varie en raison inverse du rayon vecteur.* De plus, sa valeur étant négative, il s'ensuit qu'*elle est dirigée du mobile* M *vers le foyer* F.

81. *Remarque.* — On peut conclure, de la formule (8), que *la vitesse varie en raison inverse de la distance comprise entre le foyer et la tangente* MT *à la trajectoire.* En effet, α étant l'angle FMT, on a (*)

$$\tang\alpha = \frac{r\omega'}{r'},$$

c'est-à-dire

$$\tang\alpha = \frac{c}{rr'}. \quad (13)$$

Éliminant r' entre cette relation et l'équation (8), on obtient

$$v = \frac{c}{r\sin\alpha},$$

ou

$$v = \frac{c}{p}. \quad (14)\ (^{**})$$

82. Les équations (13), (10) et (3) donnent, par un calcul facile,

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}.$$

Par conséquent, les valeurs absolues de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète sont

$$T = \frac{\mu}{r^2}\frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}, \quad C = \frac{\mu}{r^2}\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^2-(a-r)^2}}. \quad (15)$$

De cette dernière, jointe à la formule (11), on conclut l'expression suivante pour *le rayon du cercle osculateur de l'ellipse :*

$$\rho = \frac{[a^2-(a-r)^2]^{\frac{3}{2}}}{ab}. \quad (16)\ (^{***})$$

(*) La formule ordinaire est (*D. D.*, 138) $\tang\alpha = \frac{u}{u'}$; mais ici $u = r$, et u', *dérivée de* u *par rapport à* ω, doit être remplacée par $\frac{r'}{\omega'}$.

(**) De chacune des formules (11) ou (14), il résulte que la vitesse décroît constamment, du *périhélie* A à l'*aphelie* A'.

(***) Quelques-uns des résultats auxquels nous venons de parvenir avaient été indiqués dans les Exercices de l'*Algèbre* (Chap. XII).

EXERCICES.

I. Une *bielle*, de longueur l, est articulée, à l'une de ses extrémités, avec une *manivelle* de rayon R, dont le mouvement est uniforme. La seconde extrémité de la bielle est articulée avec un axe fixe dont la direction passe par le centre de la manivelle. Quelles sont les circonstances du mouvement d'un point quelconque de la bielle?

II. Un point matériel décrit une *hélice tracée sur un cône de révolution* (*), dont l'axe est vertical. La projection du point, sur cet axe, se meut conformément à la loi de la chute des corps pesants (**). Quel est le mouvement du point?

III. Une circonférence roule sur une circonférence égale, supposée fixe, de telle sorte que leurs plans soient constamment perpendiculaires entre eux. Quel est le mouvement d'un point de la première circonférence (***).

IV. Un point matériel parcourt une ellipse, de manière que le rayon vecteur mené au centre de la courbe, a une vitesse angulaire constante. Quelles sont les circonstances du mouvement (****)?

V. Un point matériel décrit la *spirale hyperbolique* représentée par $r = \frac{a}{1 + e\omega}$. Quelle est, en direction et en grandeur, l'accélération?

Réponse : L'accélération est dirigée vers le pôle; elle varie en raison inverse du cube du rayon vecteur.

VI. Un point parcourt une circonférence pendant que celle-ci tourne autour d'un de ses diamètres, supposé fixe. La vitesse angulaire du point est égale à de la vitesse de rotation de la circonférence. Quelles sont les circonstances principales de ce mouvement (*****)?

(*) La projection de l'*hélice conique*, sur un plan perpendiculaire à l'axe, est une *spirale d'Archimède*, représentée par $u = a\omega$. (*Voyez* page 102, Exercices.)

(**) *Voyez* le Problème I.

(***) *Voyez* le Problème III.

(****) Cette question m'a été suggérée par l'enseigne du *Cadran ovale*, que l'on voit dans une rue de Paris.

(*****) *Voyez* page 102.

VII. Étant donnés un cercle et une droite BB' tangente, on fait mouvoir la droite de telle manière que le point de contact A parcoure le cercle d'un mouvement uniforme en 8 secondes, en même temps que la droite tourne autour du point A d'un mouvement uniforme en 4 secondes. Le point B' est à une distance de 1 mètre du point A. On demande quelle sera la vitesse du point B' au bout de 3 secondes. (Question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique, en 1855.)

CHAPITRE VIII.

DE L'INERTIE ET DES FORCES.

83. Principe fondamental. — *Un corps ne peut modifier de lui-même son état de repos ou de mouvement.*

Une expérience de tous les instants met hors de doute la première partie de cette proposition. Par exemple, si j'ai posé un livre sur ma table, il y restera jusqu'à ce qu'*une cause étrangère* quelconque lui fasse occuper un autre lieu.

La seconde partie du principe n'est pas aussi évidente. On pourrait même être tenté de croire que les corps ont une propension naturelle à modifier leur état de mouvement. Ainsi, quand on fait rouler les billes sur un billard, leurs vitesses respectives diminuent de plus en plus, et bientôt elles s'arrêtent. Ainsi encore, quand on lance une pierre, on reconnaît qu'au lieu de se mouvoir indéfiniment dans la direction qu'on lui avait imprimée, elle décrit dans l'air une trajectoire à peu près parabolique, et finit par rencontrer la surface de la terre.

Avec un peu d'attention, on se convainc que ces *altérations* de mouvement sont constamment dues à des causes étrangères au mobile. Dans le cas de la bille, ces causes sont le *frottement* sur le drap qui recouvre le billard, et aussi la *résistance de l'air;* dans le cas de la pierre lancée, la direction et la grandeur de la vitesse sont, à chaque instant, modifiées par la *résistance de l'air* et *l'attraction de la terre.*

En effet, si le drap du billard est de plus en plus fin, si même

on le remplace, d'abord par une plaque de marbre, ensuite par une glace, on reconnaît que le temps au bout duquel la bille s'arrête croît de plus en plus, la vitesse d'impulsion restant la même. S'il était possible de jouer dans le vide, ce temps serait encore plus long.

D'un autre côté, une balle de plomb, lancée horizontalement par la main d'un homme, tombe plus loin que si elle était lancée par la main d'un enfant; et, si elle est mise en mouvement à l'aide d'un pistolet ou d'un fusil, elle va tomber bien plus loin encore. Ainsi, *plus la vitesse initiale est considérable, plus le mouvement tend à se conserver rectiligne et uniforme*. Ce résultat se comprend sans peine, si l'on admet que les causes d'altération sont celles que nous avons dites; il serait tout à fait inexplicable, si l'on prétendait qu'elles sont inhérentes à la balle.

84. D'après ces considérations, nous admettrons les deux propositions suivantes, qui ne sont que le développement du principe fondamental, et qui servent de base à la Mécanique :

1°. *Un corps en repos demeure éternellement en repos, à moins qu'il ne soit mis en mouvement par quelque cause étrangère;*

2°. *Un corps en mouvement conserve éternellement ce mouvement, avec la même direction et la même vitesse, à moins qu'il ne soit troublé par quelque cause étrangère.*

85. Cette propriété en vertu de laquelle tout corps persiste dans son état, que ce soit l'état de repos ou de mouvement, est ce qu'on appelle l'*inertie de la matière*, ou simplement l'*inertie* (*).

86. L'inertie peut servir à expliquer divers phénomènes :

1°. Lorsqu'on frappe le manche d'un outil contre un corps fixe, l'outil s'enfonce dans le manche : cela tient à ce que son mouvement continue après que celui du manche a cessé.

2°. Réciproquement, si l'on frappe sur le manche, l'outil, *en*

(*) « Ce terme d'inertie a d'abord été introduit dans la philosophie par ceux qui soutenaient que tout corps avait un penchant pour le repos. Ils envisageaient les corps comme des hommes paresseux, qui préfèrent le repos au travail, et attribuaient aux corps une horreur pour le mouvement, semblable à celle que les hommes paresseux ont pour le travail, le terme d'inertie signifiant à peu près la même chose que celui de paresse. » (Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

vertu de son inertie, reste en repos ou se meut lentement, et il s'enfonce dans le manche.

3°. Si une balle de plomb est lancée, avec une arme à feu, contre un carreau de vitre suspendu à une ficelle, elle y fait une ouverture circulaire; on attribue ce phénomène à l'inertie de la partie du carreau qui n'est pas rencontrée par la balle.

4°. Au moment où on lâche l'un des deux fils d'une fronde, la pierre, en vertu de son inertie, s'échappe suivant la tangente au cercle qu'elle décrivait.

5°. Lorsqu'un cheval lancé au galop vient à s'arrêter brusquement, il peut arriver que le cavalier, encore animé de la vitesse qu'il partageait avec sa monture, soit lancé par-dessus la tête de l'animal.

6°. Quand on saute d'un wagon tandis que le train est en marche, on s'expose à être jeté sur le sol dans le sens du mouvement du train, parce qu'à l'instant où les pieds sont arrêtés par leur contact avec le sol, le corps possède encore une partie de sa vitesse primitive. Il y a plus : si cette vitesse est considérable, le choc des pieds contre le sol peut, en se transmettant au cerveau, déterminer la mort (*).

87. On appelle *force, la cause étrangère,* quelle qu'elle soit, *qui modifie ou qui tend à modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps* (**).

Ainsi, la *pesanteur* est une force, parce qu'elle tend sans cesse à faire mouvoir les corps vers le centre de la terre; le petit *effort musculaire* que j'exerce pour faire courir ma plume sur le papier est une force; l'*affinité,* en vertu de laquelle deux gaz mis en présence se combinent, est une force; la *tension de la vapeur,* qui fait mouvoir les pistons d'une locomotive, est une force, etc.

88. Quand un corps se meut, ou qu'il tend à se mouvoir, il en

(*) Témoin l'accident du 13 juillet 1842.

(**) « Puisqu'un corps, en vertu de sa nature, conserve le même état, tant de mouvement que de repos, et qu'il n'en saurait être détourné que par des causes externes, il s'ensuit que, pour qu'un corps change d'état, il faut qu'il y soit *forcé* par quelque cause étrangère.... De là vient qu'on donne à cette cause le nom de *force.* » (EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne.*)

est de même pour tous les points matériels qui le composent; on doit donc admettre que chacun d'eux est sollicité par une force. Cela posé, on considère dans une force quelconque :

1°. Son *point d'application :* c'est le point sur lequel elle agit;

2°. Sa *direction :* c'est la droite suivant laquelle le point d'application, *supposé entièrement libre,* commencerait à se mouvoir;

3°. Son *intensité :* c'est le rapport de cette force à la force prise pour unité. Nous reviendrons plus loin sur cette définition.

89. Une force, quelle que soit son intensité, emploie toujours un certain temps pour imprimer une vitesse à un corps en repos. Quand on donne un coup de marteau sur la tête d'un clou, les surfaces des corps restent en contact pendant un temps très-court, mais cependant *fini.* C'est pendant ce temps que le marteau chasse le clou (*).

Effets des forces.

90. Les forces produisent des effets très-variés : tantôt elles accélèrent le mouvement des corps auxquels elles sont appliquées; tantôt elles le ralentissent; tantôt enfin elles se neutralisent réciproquement, *de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement* des corps considérés. Dans ce dernier cas, on dit que les forces se font *équilibre,* ou que l'une quelconque d'entre elles fait équilibre à toutes les autres, par l'intermédiaire des corps.

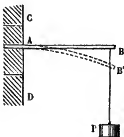
91. *Remarque.* — L'idée d'*équilibre* n'entraîne pas nécessairement celle de *repos :* quand on dit que des forces, appliquées à un point matériel, se font équilibre, cela signifie que, sous l'influence de ces forces, le point matériel restera en repos s'il y était d'abord, ou qu'il se meut uniformément en ligne droite, s'il a reçu une *impulsion* primitive. Ces deux états d'équilibre sont désignés, respectivement, sous les dénominations d'*équilibre statique* et d'*équilibre dynamique.*

(*) Autrefois, on partageait les forces en *forces continues* et en *forces instantanées.* Cette classification a été abandonnée. Aujourd'hui, les physiciens et les géomètres sont d'accord sur ce principe : *il n'y a pas de forces absolument instantanées.*

Forces égales. — Comparaison des forces aux poids.

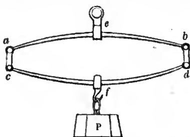
92. On dit que *deux forces sont* égales *lorsque, étant placées dans les mêmes circonstances, elles produisent les mêmes effets.*

Pour éclaircir cette définition, considérons un appareil formé d'une verge d'acier AB, encastrée, par l'une de ses extrémités, dans un mur CD. Si, à l'autre extrémité B, nous suspendons un poids P, de 12 kilogrammes, par exemple, la verge s'infléchira, et prendra une nouvelle position d'équilibre AB'. Maintenant, enlevons le poids P, et, en supposant que la tige AB soit redevenue rectiligne, exerçons en B, avec la main, une *pression* de plus en plus grande, jusqu'à ce que la verge prenne de nouveau la figure AB'. A ce moment, la pression produisant le même effet que le poids P, nous dirons qu'elle lui est égale.



Cet exemple suffit pour faire comprendre ce que l'on doit entendre par une *pression,* une *traction,* un *effort,* de 12 kilogrammes, de 100 kilogrammes, de 1 000 kilogrammes, etc.

93. L'expérience que nous venons d'indiquer se fait plus convenablement au moyen du *dynamomètre.* On donne généralement ce nom à tous les instruments destinés à *comparer les forces aux poids.* L'un des plus simples et des plus parfaits se compose de deux verges d'acier *ab*, *cd*, réunies à leurs extrémités par deux pièces de fer *ac*, *bd*. Deux lames *e*, *f*, fixées au milieu des deux verges et munies de crochets, permettent de suspendre le dynamomètre et d'y appliquer la force que l'on veut évaluer.



Pour graduer l'instrument, on suspend en *f*, successivement, des poids égaux à 1, 2, 3,... kilogrammes, et l'on marque, sur un limbe disposé à cet effet, le point où vient s'arrêter une aiguille qui tourne quand les deux verges s'écartent ou se rapprochent.

Au moyen de cet instrument, ou de ceux qui sont construits sur le même principe, on peut évaluer, en *kilogrammes,* les forces de traction, de pression, etc., non-seulement pendant le repos ou à *l'état statique,* mais encore pendant le mouvement, comme dans le tirage des voitures.

94. Il résulte, des explications précédentes, que l'*unité de force est le kilogramme.* Cette unité n'est pas tout à fait constante. En effet, la pesanteur allant en diminuant du pôle à l'équateur (12), il s'ensuit que le cylindre de fonte ou de laiton, auquel on a donné le nom de *kilogramme,* est moins fortement attiré vers le centre de la terre à l'équateur qu'aux pôles : ce poids d'un kilogramme, suspendu à un dynamomètre ou à une simple verge horizontale (92), produirait donc une inflexion de l'appareil plus grande en Laponie qu'à Paris. Autrement dit, le poids accusé par l'instrument, supposé d'un kilogramme à Paris, serait de plus d'un kilogramme en Laponie et de moins d'un kilogramme à Panama. Mais comme la différence est très-faible, elle est tout à fait négligeable dans les applications (*).

Égalité entre l'action et la réaction.

95. Le principe de l'*égalité entre l'action et la réaction* a été découvert par Newton. Considéré dans toute sa généralité, il signifie que *si un point matériel m exerce, sur un point marériel m', une certaine action, celui-ci exerce, sur le premier, une action égale et contraire.* Par exemple, si le premier point matériel *attire* le second, de manière à lui faire décrire la droite *m'm*, le second point attirera le premier et lui fera parcourir la droite *mm'*. De

(*) Si l'on voulait rapporter les indications du dynamomètre, en un lieu quelconque, à ce qu'elles seraient à l'Observatoire de Paris, il suffirait de les multiplier par le rapport $\frac{g}{g'}$, g' et g étant les valeurs de la gravité dans ces deux lieux. Par exemple, si le dynamomètre, observé en Laponie, a donné 3 kilogrammes pour le poids d'un corps, l'instrument, transporté à Paris, donnerait, au lieu de ce résultat,

$$3 \cdot \frac{1}{1,00137} = 2995^{\text{gr}},9.$$

La différence entre les deux indications serait donc d'environ 4 grammes.

plus, si ces deux points matériels sont identiques quant à la composition et au volume, les vitesses avec lesquelles ils se précipiteront l'un vers l'autre seront égales.

96. Dans un sens plus restreint, le principe de Newton revient à celui-ci, que l'on pourrait regarder comme un *axiome* de Mécanique :

Si deux forces, appliquées à un corps solide, se font équilibre, elles sont égales et directement opposées. Ainsi, quand j'appuie ma main sur une table, il se développe, dans celle-ci, une *résistance* égale et contraire à la pression exercée : cette résistance se traduit par une sensation d'autant plus pénible, que l'effort est plus grand. Ainsi encore, quand un cheval traîne une voiture, il éprouve une résistance au mouvement, égale et contraire à l'effort qu'il développe. Pour se convaincre de ce dernier point, il suffit d'établir, entre le cheval et la voiture, une corde portant un dynamomètre à chacune de ses extrémités : on trouve que les indications des deux instruments sont égales, au moins quand le mouvement est uniforme; par conséquent, la corde est sollicitée par deux forces égales et contraires.

Production du mouvement par les forces.

97. Principe expérimental. — *Une force agit sur un point matériel en mouvement, comme elle agirait s'il était en repos.*

Il est difficile d'expliquer, à priori, le sens exact et la portée de cette proposition, qui constitue un véritable *postulatum* de Mécanique. L'application que nous en allons faire servira à la faire comprendre, au moins dans un cas particulier.

98. Théorème. — *Une force constante* F, *appliquée à un point matériel m en repos, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*

Pour fixer les idées, admettons que le point matériel m soit une parcelle de fer, et que la force F soit un aimant, supposé *concentré* en son pôle P. Si l'aimant restait en repos, l'intensité de la force *attractive* F croîtrait très-rapidement, à mesure que la distance mP



diminuerait. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire pour que la

force soit *constante*, aussi bien en *intensité* qu'en *direction*, faisons *reculer* le pôle P le long de la droite $AmPB$, à mesure que la parcelle de fer avance, de manière à rendre invariable la distance entre le point attirant et le point attiré. Soient, au bout d'un temps quelconque θ, m' et P' les positions de ces deux points, et β leur vitesse commune, c'est-à-dire la *vitesse acquise* par le point matériel, sous l'influence de la force F. Si, à partir de ce temps θ, on supprimait brusquement celle-ci, en enlevant l'aimant, ou en le neutralisant par un aimant égal et de polarité contraire, le mouvement du point matériel deviendrait, à l'instant même, rectiligne et uniforme (88, 2°). Mais, puisque nous n'avons rien changé aux positions respectives de l'aimant et de la molécule de fer, celle-ci sera animée, à la fin du temps 2θ, de la vitesse β qu'elle a conservée en vertu de son inertie, et de la vitesse β que l'aimant lui a fait acquérir, conformément au principe précédent, pendant le deuxième intervalle de temps θ : sa vitesse totale sera donc 2β. De même, à la fin du temps 3θ, la vitesse du point matériel se composera de 2β, augmentée de la vitesse β due à l'action de la force F, pendant le troisième intervalle de temps θ. En continuant de la même manière, on voit qu'à la fin du temps $n\theta$, la vitesse sera devenue $n\beta$. Le mouvement que nous considérons est donc tel, que la vitesse acquise par le mobile croît proportionnellement au temps, c'est-à-dire qu'il est uniformément accéléré.

99. *Remarque.* — Si l'on remplace $n\theta$ par t, on aura, pour l'expression de la vitesse,

$$v = n\beta = \frac{t}{\theta}\beta,$$

ou, en appelant b le rapport de β à θ.

$$v = bt.$$

Cette formule est précisément celle du mouvement uniformément varié (27), en supposant que le mobile n'ait pas eu de vitesse initiale.

100. Reprenons l'exemple ci-dessus, et supposons que la parcelle de fer, au moment où elle est soumise à l'action de l'aimant, soit déjà animée d'une vitesse initiale a. Supposons, de plus, *que la force* F *agisse dans la direction de cette vitesse initiale.* Alors, si nous répétons les raisonnements précédents, nous trouverons

que la vitesse du mobile, au bout du temps t, sera donnée par la formule

$$v = a + bt.$$

Conséquemment, *une force constante* F, *appliquée à un point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et agissant suivant la droite que décrit le point, lui imprime un mouvement uniformément varié.*

101. *Remarque.* — Le mouvement est *uniformément accéléré* ou *uniformément retardé,* suivant que la force, supposée *attractive,* agit dans le sens de la vitesse primitive ou dans le sens directement opposé.

102. Théorème II. — *Si un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante.*

Pour démontrer cette proposition, réciproque de la précédente, il suffit de faire les remarques suivantes :

1°. Le mouvement considéré, n'étant pas rectiligne uniforme, est dû à une force qui agit *actuellement* sur le mobile (84, 2°);

2°. Quand une force n'agit pas dans le sens de la vitesse initiale, ou dans le sens de la vitesse à un instant *déterminé,* le mouvement n'est pas *rectiligne ;*

3°. Lors même qu'une force serait, à chaque instant, dirigée dans le sens de la vitesse initiale du mobile, si elle n'est pas constante en intensité, les accroissements de vitesse, correspondant à des temps égaux, seraient inégaux ; donc le mouvement produit par cette force ne serait pas uniformément varié.

Indépendance des effets produits par plusieurs forces.

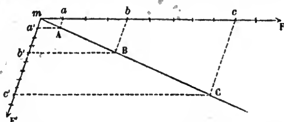
103. Principe expérimental. — *Si plusieurs forces sont appliquées à un point matériel, chacune d'elles agit comme si les autres n'existaient pas.*

Ce principe renferme, comme cas particulier, celui du n° 97. Nous allons l'appliquer à la démonstration du théorème suivant, que l'on peut regarder comme donnant une vérification du principe sur lequel est fondée la *composition des mouvements rectilignes* (37).

104. Théorème III. — *Deux forces* F, F', *constantes en gran-*

deur et en direction, appliquées à un point matériel m en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des deux mouvements rectilignes uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.

Supposons que les forces F, F′ soient des *attractions* émanant de deux centres placés *à l'infini*, l'un dans la direction mF, l'autre dans la direction mF′(*). Soient a, b, c,..., les positions que prendrait le point matériel au bout de une, deux, trois,..., unités



de temps, si la force F′ n'existait pas; soient, semblablement, a', b', c',..., les positions qu'occuperait le mobile aux mêmes époques, si la force F était supprimée. D'après les hypothèses faites sur les deux forces, leurs *directions* sont parallèles à mF et mF′, quelle que soit la position du point matériel. Or, le principe énoncé ci-dessus signifie simplement que, sous l'action simultanée des deux forces, le mouvement du point, *estimé* parallèlement à la direction de chacune d'elles, est indépendant de l'autre (**). Il faut donc, pour obtenir les positions effectives du mobile au bout des temps considérés, achever les parallélogrammes maAa', mbBb', mcCc',.... On conclut de cette construction, absolument comme dans le n° 37 : 1° que *la trajectoire* mABC,..., *est rectiligne;* 2° que *les espaces* mA, mB, mC,..., *croissent comme les carrés des temps;* 3° que *l'accélération* RÉSULTANTE *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme*

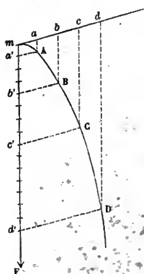
(*) Cette hypothèse serait à peu près réalisée dans le cas d'un aérolithe sollicité par la terre et par la lune. Seulement, l'*infini* est mis ic à la place de *très-loin*.

(**) On peut dire encore que *le mouvement de la projection du point matériel, sur la direction de l'une des forces, est indépendant de l'autre* (47).

construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les accélérations COMPOSANTES (*).

105. *Remarque.* — Cette troisième conséquence de l'action simultanée des forces F, F', constitue le *parallélogramme des accélérations*, évidemment compris dans le théorème sur l'accélération d'un mouvement résultant (66).

106. Après le cas, difficilement observable, de deux forces constantes agissant sur un point matériel en repos, considérons le mouvement déterminé par une force constante F, agissant sur un point *m* animé d'une vitesse initiale non dirigée suivant la force; et supposons encore le centre d'attraction placé à l'infini.



md étant la direction de la vitesse initiale, soient *a*, *b*, *c*, *d*,..., les positions qu'occuperait le mobile après une, deux, trois,..., unités de temps, si la force F était supprimée, et *a'*, *b'*, *c'*, *d'*,..., celles qu'il aurait occupées s'il n'avait pas eu de vitesse initiale. En vertu du principe déjà rappelé (97), le mouvement du mobile, *estimé* parallèlement à la direction de la vitesse initiale, est indépendant de la force F, et *vice versâ*. La trajectoire *m*ABC,..., se construit donc aisément par points, au moyen des parallélogrammes *ma*A*a'*, *mb*B*b'*, (**)....

107. *Loi de Galilée.* — Le principe *expérimental* de l'*indépendance des effets des forces*, et sa corrélation avec le principe *géo-*

(*) Ces trois propositions, auxquelles nous venons de parvenir en supposant le point *m* sollicité par les forces F, F', peuvent être obtenues aussi, indépendamment de la considération de ces forces, en regardant le mouvement absolu du point *m* comme résultant de son mouvement sur la droite *mc*, combiné avec une translation de cette ligne. Cette remarque confirme ce que nous avons dit à la fin du numéro précédent.

(**) Cette trajectoire est évidemment une *parabole*.

métrique de la *composition des mouvements*, ont été découverts par Galilée. La *loi* à laquelle le conduisit l'étude attentive de divers phénomènes de mouvement peut être ainsi formulée:

Les mouvements relatifs de plusieurs corps ne sont pas altérés, quand on imprime à tout leur système un mouvement commun de translation (*).

108. *Preuves de la loi de Galilée.* — 1°. Supposons qu'un matelot laisse tomber une balle du haut d'un mât, tandis que le vaisseau est en mouvement.

Avant que le matelot eût lâché la balle, celle-ci participait au mouvement du vaisseau, mouvement que nous supposons rectiligne et uniforme. Par conséquent, si elle n'était sollicitée par la pesanteur, la balle, placée d'abord en a, parcourrait uniformément la droite horizontale $ab'c'd'$, *en vertu de l'inertie*. D'un autre côté, si le bâtiment était en repos, le mobile tomberait le long du mât am, en parcourant des espaces proportionnels aux carrés des temps (32). La composition de ces deux mouvements donne, comme dans la question précédente, la trajectoire véritable aBCD,..., laquelle est une parabole. Mais comme le vaisseau continue à se mouvoir avec sa vitesse primitive, il s'ensuit que les positions successives $b'm'$, $c'm''$, $d'm'''$,..., du mât, passent par les positions B, C, D,..., de la balle: *celle-ci tombe donc au pied du mât.*

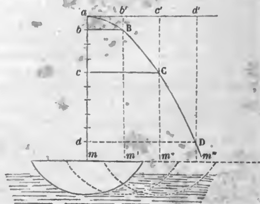
(*) Voici comment un grand géomètre et un célèbre philosophe énoncent la *loi de Galilée* :

« Différents mouvements imprimés à la fois ou successivement à un » même corps, se composent de manière que le corps se trouve à chaque » instant dans le même point de l'espace où il devrait se trouver en » effet par la combinaison de ces mouvements, s'ils existaient chacun » et séparément dans le corps. » (LAGRANGE, *Mécanique analytique*, t. I, page 207.)

« Si plusieurs corps agissent les uns sur les autres, par telles forces » qu'on voudra, intérieures ou extérieures, leur état relatif de mouve- » ment ou de repos ne sera nullement altéré en imprimant à tous un » même mouvement d'ailleurs arbitraire, qui leur fasse décrire à la fois » des droites égales et parallèles. » (AUGUSTE COMTE, *Astronomie populaire*, page 388.)

N'ayant pas à ma disposition les OEuvres de Galilée, j'ai dû choisir, entre les deux *versions*, celle qui m'a paru attribuer le plus d'importance à la découverte de l'illustre Pisan.

C'est ce que les Coperniciens niaient, et que Galilée démontra (*B.*, *Cosmographie*, 96).



2°. Dans un bateau qui suit, sans secousse, le cours d'une rivière, on peut écrire, jouer au billard, etc., absolument comme sur la *terre ferme*.

3°. L'air contenu dans un wagon fermé a souvent, par rapport à l'air extérieur, une vitesse relative de 60 kilomètres par heure. Néanmoins, le mouvement de cette colonne d'air n'influe ni sur la direction du fil à plomb, ni sur les oscillations d'un pendule qui serait placé dans l'intérieur du wagon.

4°. Si un voyageur qui parcourt, sur un chemin de fer, environ 10 mètres par seconde, lance verticalement, à une hauteur de 6 mètres, un corps quelconque, sa main pourra recevoir le projectile, quoique, pendant les 2 secondes qu'auront duré l'ascension et la descente, elle ait été transportée à 20 mètres du point de départ.

Comparaison des forces constantes.

109. Théorème. — *Deux forces constantes* F, F', *appliquées successivement à un même point matériel m, dans la direction de sa vitesse initiale, sont entre elles comme les accélérations* w, w' *qu'elles produisent.*

Supposons qu'une même force f puisse être contenue n fois dans F et n' fois dans F' (*). Cette force f, appliquée au point ma-

(*) Quand on dit qu'une force f *est contenue n* fois dans une autre

tériel m, lui imprimerait un mouvement uniformément varié (100): soit υ l'accélération du mouvement, c'est-à-dire l'augmentation de vitesse dans l'unité de temps. Des forces égales à $2f$, à $3f, \ldots$, appliquées au même point, donneraient lieu à des mouvements de même nature, dont les accélérations seraient 2υ, $3\upsilon, \ldots$, (104). Dès lors, puisque

$$F = nf, \quad F' = n'f,$$

on doit avoir

$$w = n\upsilon, \quad w' = n'\upsilon;$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{w}{w'}. \quad (1)$$

110. Remarque. — *Si le point matériel m n'a pas de vitesse initiale, les forces* F, F' *sont entre elles comme les vitesses* v, v' *qu'elles produisent dans des temps égaux.*

En effet, les formules

$$v = wt, \quad v' = w't,$$

donnent

$$\frac{v}{v'} = \frac{w}{w'};$$

d'où, à cause de la proportion ci-dessus,

$$\frac{F}{F'} = \frac{v}{v'}.$$

Relations entre les forces, les accélérations et les masses.

111. *Définition de la masse.* — 1°. La relation fondamentale (1) donne

$$\frac{F}{w} = \frac{F'}{w'};$$

---

force F, on veut exprimer que celle-ci *équivaut* à n forces égales à la première. Or, on conçoit qu'en descendant à une force f *suffisamment petite*, il est toujours possible d'arriver à un *sous-multiple* commun de deux forces quelconques F, F', sinon exactement, du moins avec une approximation plus que suffisante. Par exemple, si l'on veut comparer la force de traction d'un homme à celle d'un cheval, on pourra essayer d'abord, comme terme de comparaison, la force d'un enfant. Admettons que l'expérience apprenne qu'un homme est plus fort que trois enfants réunis et plus faible que quatre : l'unité essayée étant trop grande, on aura recours, par exemple, à la force d'un jeune chien; et ainsi de suite.

puis, si l'on considère successivement des forces F, F', F'',..., en nombre quelconque,

$$\frac{F}{w} = \frac{F'}{w'} = \frac{F''}{w''} = \ldots \quad (2)$$

Ainsi, *quand un point matériel est sollicité successivement par diverses forces constantes, si l'on divise le nombre qui représente la force par le nombre qui représente l'accélération correspondante, on obtient un quotient constant.*

Ce quotient est ce qu'on appelle la *masse* du point (*).

2°. Un corps étant un système de points matériels (1), il est naturel d'appeler *masse du corps* la somme des masses des points matériels qui le composent (**).

112. Considérons le cas particulier où un corps, du poids de p kilogrammes, serait abandonné librement à l'action de la pesanteur, dans le vide : il prendra un mouvement uniformément varié, dont l'accélération, évaluée en mètres, sera le nombre $g = 9{,}80896$. Nous aurons donc, en appelant m la masse du corps, et en obser-

(*) Nous devons faire, à propos de cette *définition*, adoptée depuis quelques années, une remarque analogue à celle que Poisson a faite relativement à la définition de la vitesse (**12**). Le *rapport* du *nombre* F au *nombre* w est la *mesure* de la masse, et non la masse elle-même. La masse d'un corps est une propriété *sui generis*, qui n'est pas susceptible de définition: seulement, on juge de la grandeur de la masse d'après l'effort que l'on est obligé d'exercer pour imprimer au corps une accélération déterminée.

(**) On verra plus loin que des forces $f, f', f'', \ldots$, parallèles et de même sens, ont une *résultante* F égale à leur somme. Cela posé, si toutes les molécules d'un corps solide ont un mouvement commun de translation, dont l'accélération soit w, on aura, en désignant par m, $m', m'', \ldots$, les masses de ces molécules, et par $f, f', f'', \ldots$, les forces correspondantes,

$$w = \frac{f}{m} = \frac{f'}{m'} = \frac{f''}{m''} = \ldots = \frac{f + f' + f'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots} = \frac{F}{m + m' + m'' + \ldots}.$$

Ainsi,

$$\frac{F}{w} = m + m' + m'' + \ldots,$$

ce qui justifie la définition donnée dans le texte.

vant que la force qui le sollicite est précisément son poids :

$$\frac{p}{g} = m, \quad (3)$$

ou

$$p = mg. \quad (4)$$

Donc *la masse d'un corps est le quotient de son poids p par la gravité g.*

113. *Unité de masse.* — Dans les relations (3) ou (4), supposons $m = 1$, nous aurons

$$p = g = 9,80896.$$

Ainsi, *la masse prise pour unité est celle d'un corps du poids de 9808,96 grammes.*

114. *Mesure d'une force constante.* — Reprenons la relation (2), et remplaçons par m le rapport qui y entre ; nous trouvons

$$F = mw = \frac{p}{g} w. \quad (5)$$

Conséquemment, *si l'on continue de prendre, pour unité de force, le poids d'un kilogramme, une force constante quelconque aura pour mesure le produit de la masse du corps qu'elle sollicite, par l'accélération qu'elle détermine ;* ou, en termes plus simples :

Une force constante a pour mesure le produit de la masse du mobile par l'accélération.

115. *Quantité de mouvement.* — Soient F, F′ deux forces agissant sur deux corps de masses m, m' et produisant des accélérations w, w' ; on aura

$$F = mw, \quad F' = m'w' ;$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{w}{w'}.$$

D'un autre côté, si les corps sont partis du repos, leurs vitesses v, v', au bout du temps t, seront proportionnelles aux accélérations w, w' (31) ; conséquemment,

$$\frac{F}{F'} = \frac{mv}{m'v'}.$$

En appelant *quantité de mouvement* d'un corps le produit de sa masse m par sa vitesse v, on peut donc dire que : *deux forces constantes quelconques, appliquées à deux masses m, m' dépourvues de vitesse initiale, sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent après des temps égaux.*

CHAPITRE IX.

THÉORIE DE LA PESANTEUR (*).

Définitions.

116. La *pesanteur* est la cause en vertu de laquelle les corps tendent à tomber à la surface de la terre (**). On lui donne auss le nom de *gravité*. Elle est un cas particulier de la *gravitation universelle*.

117. Le *poids* d'un corps sollicité par la *pesanteur* est la *pression* exercée par ce corps sur l'obstacle qui l'empêche de tomber ; elle est égale et directement opposée à la *résistance* de l'obstacle (96). Pour soutenir, avec la main, un poids de 5 kilogrammes, on est obligé de développer un effort musculaire : cet effort équivaut à 5 kilogrammes.

118. *Remarque.* — Les expressions *pesanteur* et *poids* ne doi-

(*) Sous ce titre, nous réunissons un certain nombre de questions, fort importantes, que nous n'avons pu traiter d'une manière complète dans le *Manuel du Baccalauréat*. Bien qu'elles ne soient pas *exigées*, les candidats à l'École Polytechnique doivent être en état d'y répondre.

(**) « Tous les corps, tant solides que fluides, tombent en bas dès qu'ils ne sont plus soutenus. Quand je tiens une pierre dans la main et que je la lâche, elle tombe à terre et tomberait encore plus loin s'il y avait un trou dans la terre. Dans le temps même que j'écris ceci, mon papier tomberait à terre s'il n'était soutenu par ma table. La même chose arrive à tous les corps que nous connaissons ; il n'en est aucun qui ne tombe à terre dès qu'il n'est plus soutenu ou arrêté. La cause de ce phénomène ou de ce penchant qui se trouve dans tous les corps est nommée leur *gravité* ou leur *pesanteur*. » (EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne*.)

vent pas être confondues : la pesanteur est la cause générale, la force qui fait tomber tous les corps ; le poids est la portion de cette force appliquée à un corps déterminé (*).

119. *Centre de gravité.* — Le *point d'application* (88) du poids d'un corps est appelé, pour une raison que nous verrons plus tard, *centre de gravité* du corps. *Ce centre n'est pas nécessairement dans l'intérieur du corps* (**).

120. *Verticale.* — Quand un corps pesant est suspendu, à l'état de repos, à l'extrémité d'un fil très-délié, il y a équilibre entre le poids du corps et la résistance que le fil oppose à la rupture (96) : la direction du poids, ou la *verticale* du lieu, est donc celle du fil. C'est ce qu'on exprime en disant : *la direction de la verticale est indiquée par le fil à plomb.*

121. On démontre, dans la Mécanique rationnelle, que *la verticale d'un lieu est normale à la surface des eaux tranquilles.* D'ailleurs la figure de la terre est celle d'un ellipsoïde aplati, très-peu différent d'une sphère. Conséquemment, *la verticale d'un lieu quelconque passe, à fort peu près, par le centre de la terre.*

Phénomènes produits par la pesanteur.

122. *Chute des corps pesants.* — Dans le vide, les corps *légers* tombent aussi rapidement que les corps *lourds.* Dans l'air, il n'en est plus de même : une pièce de monnaie tombe beaucoup plus vite qu'une rondelle de papier ayant le diamètre de la pièce. La

(*) Pour éviter toute ambiguïté, on devrait peut-être employer exclusivement le mot de *pesanteur* pour désigner, non la *cause* en vertu de laquelle les corps tombent, mais bien la *propriété* qu'ils ont de tendre à tomber. Euler, dont l'opinion doit avoir tant d'autorité, dit expressément, dans l'ouvrage cité : *Quand on dit que tous les corps sont graves, on entend qu'ils ont un penchant à tomber, et qu'ils tomberont tous en effet dès qu'on ôtera ce qui les a soutenus jusqu'ici.* Il est bien vrai qu'immédiatement avant cette phrase, le grand géomètre appelle *gravité ou pesanteur la cause de ce penchant qui se trouve dans tous les corps,* mais c'est peut-être là, ou une très-légère inadvertance, ou un sacrifice à l'opinion commune.

(**) Par exemple, le centre de gravité d'une mince capsule ou hémisphère de platine est situé, à très-peu près, au milieu du rayon perpendiculaire à la base.

raison de cette différence de vitesse est facile à saisir : la résistance de l'air, s'exerçant de la même manière sur les deux corps, est relativement plus grande sur celui qui pèse le moins; elle doit donc ralentir le mouvement de celui-ci bien plus que le mouvement du premier (*).

123. *La pesanteur est une force constante.* — Puisque tous les corps, abandonnés à eux-mêmes, dans le vide, tombent également vite; puisque la direction du poids d'un corps quelconque passe par le centre de la terre, il est naturel de supposer, à cause des grandes dimensions de celle-ci, que la pesanteur est une force constante, émanant de ce centre, lequel jouerait le rôle de pôle attractif (98). S'il en est ainsi, le mouvement d'un corps qui tombe d'une petite hauteur (**) doit être uniformément accéléré. Mais, comme la vitesse acquise croît très-rapidement, il n'est pas possible de vérifier, d'une manière directe, si les lois de la chute des corps pesants sont celles que nous avons indiquées ci-dessus (32). On supplée à cette observation effective, soit par le *plan*

(*) Soient P, p les poids de la pièce et de la rondelle, soit r la résistance que l'air oppose au mouvement vertical d'une surface horizontale égale à la surface de chacun des deux corps. La force qui sollicite le poids P étant $P - r$, l'accélération correspondante sera (114)

$$w = g \cdot \frac{P - r}{P} = g\left(1 - \frac{r}{P}\right).$$

De même, l'accélération du mouvement de la rondelle a pour valeur

$$w' = g \cdot \frac{p - r}{p} = g\left(1 - \frac{r}{p}\right).$$

Donc, à cause de $P > p$, on aura

$$w > w'.$$

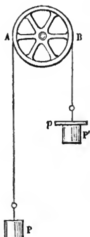
Il est bien entendu que c'est là une première *ébauche* de la *théorie du mouvement des corps pesants dans l'air:* en réalité, la résistance r, au lieu d'être constante, comme nous le supposons ici, croît rapidement avec la vitesse du mobile.

(**) Si l'on pouvait faire tomber un corps, soit d'une très-grande hauteur, soit dans un puits très-profond, son mouvement ne serait plus uniformément accéléré, parce que l'attraction, au lieu d'être à peu près constante, varierait avec la distance au centre de la terre.

incliné de Galilée, soit par la *machine d'Atwood,* soit enfin par *l'appareil à indications continues,* de MM. Poncelet et Morin.

Machine d'Atwood.

124. Elle consiste, essentiellement, en une poulie très-mobile AB, sur laquelle s'enroule un fil portant, à ses deux extrémités, des poids égaux P, P'. Un poids additionnel p, supporté par le poids P', détermine le mouvement du fil et de la poulie. Enfin, un pendule à secondes, une règle verticale divisée, un curseur annulaire et un curseur plein, permettent d'observer toutes les circonstances du mouvement, soit du système des trois poids, soit du système des poids P, P'.



125. On peut vérifier d'abord cette proposition, assez évidente du reste : *les deux poids égaux* P, P' *se font équilibre au moyen de la poulie.* Supposons, pour fixer les idées,

$$P = P' = 100^{gr}, \quad p = 5^{gr}.$$

Si, dans une première expérience, on place le curseur annulaire C à $119^{mm},6$ au-dessous du zéro de la règle, et le curseur plein D à une distance OD double de OC, puis qu'au moyen du pendule on mette en mouvement le système des trois poids, on reconnaît qu'en une seconde le poids P', augmenté de p, parcourt l'espace OC, et que dans la seconde suivante le même poids P', après avoir abandonné p, décrit l'espace CD.



Cela posé, dans une deuxième, une troisième, une quatrième expérience, on double, on triple, on quadruple CD, en laissant OC constant; et les temps qu'emploie le poids P' pour parcourir l'espace compris entre les deux curseurs sont, respectivement, 2, 3, 4 secondes. Le mouvement du système P, P' est donc uniforme à partir de l'instant où le poids p est arrêté par le curseur annulaire, c'est-à-dire que les poids P, P' se font équilibre (91) (*).

(*) Dans ces expériences et dans celles dont nous allons parler, on néglige complétement le poids du fil, ainsi que la résistance de l'air.

126. Puisqu'il en est ainsi, la force qui détermine le mouvement du système des trois corps P, P', p se réduit au poids additionnel p. Si donc, comme il s'agit de le vérifier, un corps sollicité librement par son poids a un mouvement uniformément varié, dont l'accélération *inconnue* soit représentée par g, nous aurons (**114**), en appelant w l'accélération déterminée par la force p,

$$w = g \cdot \frac{p}{2P+p}.$$

On pourra donc, à cause de la fraction $\frac{p}{2P+p}$ (*), diminuer autant qu'on le voudra l'accélération w, et rendre observables, au moyen de la machine d'Atwood, les espaces et les vitesses. Réciproquement, si le mouvement observé est uniformément accéléré, il en sera de même pour le mouvement des corps pesants entièrement libres, et la valeur trouvée pour w donnera, avec un certain degré d'approximation, l'accélération g.

127. En faisant la distance OC égale, successivement, à

$$119^{mm},6, \quad 119^{mm},6.4, \quad 119^{mm},6.9, \quad 119^{mm},6.16,$$

on trouve que les temps employés à parcourir cette distance sont

$$1^s, \quad 2^s, \quad 3^s, \quad 4^s.$$

Conséquemment, *les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps* (32).

128. Si, après avoir adopté une des valeurs précédentes pour OC, on prend CD *double* de OC, on reconnaît que le poids P', après avoir abandonné en C le poids additionnel p, vient rencontrer le curseur D au bout d'un temps égal à celui que le système P'+ p avait employé pour parcourir OC. Il suit de là que les vitesses acquises après

$$1^s, \quad 2^s, \quad 3^s, \quad 4^s,$$

sont

$$119^{mm},6.2, \quad \frac{119^{mm},6.2.4}{2}, \quad \frac{119^{mm},6.2.9}{3}, \quad \frac{119^{mm},6.2.16}{4},$$

ou $\quad 237^{mm},2, \quad 237^{mm},2.2, \quad 237^{mm},2.3, \quad 237^{mm},2.4,$

Ces derniers nombres mettent en évidence la seconde loi qu'il

(*) **Dans l'exemple choisi plus haut, la valeur de cette fraction est $\frac{1}{21}$.**

s'agissait de vérifier : *les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps*. De plus, *l'accélération* w *a pour valeur* $237^{mm},2$. Par suite, $g = 237^{mm},2.41 = 9^{m},8076$. Ce résultat diffère assez peu du véritable.

129. La machine d'Atwood peut servir encore à démontrer une autre conséquence des lois de la pesanteur, conséquence sur laquelle nous reviendrons plus loin, et qui consiste en ce que : *la hauteur à laquelle parvient un mobile lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a, est précisément égale à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette vitesse a* (*). Voici comment se fait l'expérience :

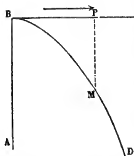
Les poids égaux P, P′ étant immobiles, on dispose, à égales distances des plans horizontaux passant par leurs faces supérieures, deux curseurs annulaires E, F ; puis on applique deux poids additionnels égaux p, p', l'un sur le curseur E, l'autre sur le poids P′. Le mouvement du système des trois poids P, P′, p' est uniformément accéléré, jusqu'à ce que les faces supérieures des poids P, P′ arrivent, l'une en E, l'autre en F. A cet instant, P est augmenté de p, et P′ abandonne p' ; en sorte que le système primitif est remplacé par le système des poids P, p, P′. La vitesse *initiale* de celui-ci est égale à la vitesse *finale* de l'autre ; mais, comme le poids additionnel p agit *de haut en bas*, tandis que P se meut *de bas en haut*, le nouveau mouvement est *retardé*. Or, on reconnaît qu'il cesse quand la face supérieure du poids P est parvenue en C, c'est-à-dire *quand le poids p s'est élevé à une hauteur égale à celle dont était descendu le poids p′*.

130. *Remarque.* — Comme, à la fin de cette expérience, le poids P remplace, en quelque sorte, le poids P′, et *vice versâ*, il s'ensuit que si l'on abandonne l'appareil à lui-même, il produira une série d'oscillations *isochrones*.

(*) Dans les Exercices du Chapitre IV, nous avons admis cette proposition.

Appareil à indications continues.

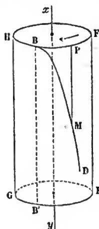
131. Pour rendre plus simple l'explication de cette machine, due, comme nous l'avons dit, à MM. Poncelet et Morin, remarquons d'abord que si une boule B, enduite d'encre, était lancée horizontalement le long d'un mur vertical ABC, elle tracerait sur ce mur, supposé peint en blanc, par exemple, une trajectoire parabolique BMD (106). L'abscisse BP et l'ordonnée PM de la position M occupée par la boule au bout du temps t, auraient pour valeurs



$$BP = at, \quad PM = \frac{1}{2}gt^2,$$

a étant la vitesse initiale du mobile.

Au lieu de lancer la boule dans la direction BP, avec une vitesse a, laissons-la tomber librement, mais remplaçons le mur par un plan vertical mobile, animé d'une vitesse égale et contraire à a : le mouvement relatif de la boule et du plan sera le même que dans le premier cas (107, 3°), et la trajectoire *apparente* tracée par la boule sur le plan sera encore la parabole BMD.



Enfin, si nous substituons au plan mobile un cylindre vertical EFGH, tournant autour de son axe xy, de telle sorte que la vitesse de chacun des points de sa surface soit a, la trajectoire BMD décrite par la bille B tombant librement sous l'action de la pesanteur, aura pour *transformée* la parabole considérée tout à l'heure.

Dans l'appareil de MM. Morin et Poncelet, la bille est remplacée par un petit poids conique, portant un *pinceau* enduit d'encre. Le cylindre tournant est recouvert d'un papier enroulé sur sa surface, et portant des lignes horizontales et des lignes verticales, équidistantes. Un mouvement d'horlogerie communique au cylindre une rotation uniforme. Enfin, un ressort

détermine simultanément la chute du poids et la rotation du cylindre. La transformée de la courbe tracée par le pinceau étant une parabole, il s'ensuit que les *espaces parcourus suivant la verticale*, par le poids conique, *sont proportionnels aux carrés des temps*. Cette loi est la seule qu'on puisse vérifier avec l'appareil dont nous venons de donner une idée.

132. *Remarque.* — L'appareil à indications continues peut servir à trouver la loi des espaces dans un mouvement rectiligne quelconque : si, par exemple, la trajectoire BMD était une *hélice*, il en résulterait que le pinceau a décrit uniformément la verticale BB'.

Problèmes sur le mouvement des corps pesants (*).

133. Problème I. — *Un projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse initiale a. On demande : 1° à quelle hauteur il parviendra; 2° après combien de temps il reviendra au point de départ.*

La force qui sollicite le projectile est son poids; elle agit en sens contraire de la vitesse initiale; le mouvement ascendant du projectile est donc uniformément retardé (101), et ses équations sont

$$v = a - gt, \quad (1)$$

$$x = at - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$

Quand le mobile s'arrête, $v = 0$; par conséquent, la hauteur h à laquelle il parvient est déterminée par les deux équations

$$0 = a - gt, \quad h = at - \frac{1}{2}gt^2.$$

Elles donnent, par l'élimination de t,

$$h = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}. \quad (3)$$

On conclut, de cette valeur de h, $a = \sqrt{2gh}$, en sorte que *la vitesse initiale a est égale à la vitesse due à la hauteur h*. Autrement dit, *la hauteur à laquelle s'élève le projectile, en vertu de*

(*) Les deux premiers ont été proposés dans les Exercices du Chapitre IV, comme exemples de mouvements rectilignes.

sa vitesse initiale a, est égale à la hauteur d'où il devrait tomber pour acquérir cette vitesse. C'est ce que nous avions déjà reconnu par l'emploi de la machine d'Atwood (129).

Le temps T que le mobile emploie à revenir au point de départ est le double du temps pendant lequel il s'élève ; par conséquent

$$T = \frac{2a}{g}.$$

134. *Remarque.* — La propriété que nous venons de démontrer peut être énoncée en termes plus généraux : *un mobile sollicité seulement par la pesanteur reprend la même vitesse quand il repasse au même point* (*).

135. Problème II. — *A n secondes d'intervalle, et dans la même direction verticale, on a lancé deux projectiles dont la vitesse initiale commune est a. On demande le temps qu'emploiera le second projectile pour atteindre le premier.*

D'après la remarque précédente, les deux projectiles, quand ils se rencontrent, ont des vitesses égales et contraires. Or, la vitesse du premier est $g\left(n+t-\frac{a}{g}\right)$; celle du second est $a-gt$; donc

$$g\left(n+t-\frac{a}{g}\right) = a - gt;$$

d'où

$$t = \frac{a}{g} - \frac{1}{2}n.$$

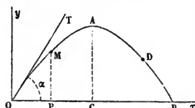
136. *Remarque.* — Si n est plus grand que $\frac{2a}{g}$, on trouve pour t une valeur négative; d'où l'on peut inférer que le problème est impossible. En effet, $\frac{2a}{g}$ représente le temps T que le premier projectile emploie pour revenir à son point de départ (133); donc, pour que les mobiles puissent se rencontrer, on doit supposer $n < \frac{2a}{g}$.

137. Problème III. — *Quelles sont les circonstances principales*

(*) Cette proposition est elle-même un cas particulier du théorème connu sous le nom de *principe des forces vives*. (*Voyez* le Chapitre XI.)

du mouvement d'un projectile dont la vitesse initiale a fait un angle α avec l'horizon?

1°. O étant la position initiale du projectile, soient Oy la verticale passant par ce point, et Ox l'horizontale menée, de ce même point, dans le plan vertical TOy passant par la direction OT de la vitesse initiale. Comme la seule force qui agit sur le projectile est la pesanteur, la trajectoire sera contenue dans le plan vertical xOy.



Cela posé, le mouvement effectif du mobile peut être décomposé en deux autres mouvements plus simples (104); l'un, parallèle à Ox, est dû seulement à la composante horizontale de la vitesse a; l'autre, parallèle à Oy, ne diffère pas du mouvement d'un projectile lancé de bas en haut avec une vitesse $a \sin \alpha$ (133). Les équations de ces deux mouvements sont donc

$$x = at \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = at \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

2°. La hauteur AC à laquelle s'élève le projectile est déterminée (133) par la formule

$$h = \frac{1}{2} \frac{(a \sin \alpha)^2}{g} = \frac{a^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (3)$$

Pour interpréter plus aisément ce résultat, supposons que a soit la vitesse due à une certaine hauteur H, de manière que $H = \frac{a^2}{2g}$; alors

$$h = H \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Comme $\sin^2 \alpha$ est inférieur à l'unité, on voit que *la hauteur du jet est toujours moindre que la hauteur* DUE *à la vitesse initiale*. Il n'y a d'exception que pour $\alpha = 90°$, auquel cas

$$h = H = \frac{a^2}{2g}.$$

3°. *La portée du jet*, c'est-à-dire la distance OB à laquelle le

projectile va rencontrer de nouveau l'axe Ox, est la valeur de x qui correspond à $y=0$. Or, on tire de l'équation (2), pour cette valeur de y, en rejetant $t=0$,

$$t=\frac{2a\sin\alpha}{g};$$

par conséquent $$\text{OB}=\frac{2a^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha,$$

ou $$\text{OB}=2\text{H}\sin 2\alpha. \quad (5)$$

On conclut, de cette valeur, que *la portée est la plus grande possible, quand le projectile est lancé sous l'inclinaison de* 45°; elle est alors égale à deux fois la hauteur qui correspond à la vitesse initiale, ou à quatre fois la hauteur à laquelle s'élève le projectile (*).

4°. On peut se proposer de chercher sous quelle inclinaison il faut lancer le projectile, afin qu'il atteigne un *but* D, dont les *coordonnées* x et y sont connues. Pour résoudre cette question, on doit éliminer t entre les équations (1), (2), et résoudre par rapport à α l'équation résultante. On obtient d'abord

$$y=x\,\text{tang}\,\alpha-\frac{gx^2}{2a^2\cos^2\alpha};$$

puis, en remplaçant a^2 par $2g\text{H}$, et $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ par $1+\text{tang}^2\alpha$:

$$x^2\,\text{tang}^2\alpha-4\text{H}x\,\text{tang}\,\alpha+4\text{H}y+x^2=0. \quad (6)$$

Cette équation donne

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{1}{x}\left[2\text{H}\pm\sqrt{4\text{H}^2-4\text{H}y-x^2}\right]. \quad (7)$$

Quand les coordonnées x et y du point D satisfont à l'inégalité

$$4\text{H}^2>4\text{H}y+x^2, \quad (8)$$

les deux valeurs de tang α sont réelles et inégales; par conséquent: *pour une même vitesse initiale du projectile, il existe en général*

(*) A cause de

$$h=\text{H}\sin^2 45^\circ=\frac{1}{2}\text{H}.$$

deux directions de cette vitesse qui permettent d'atteindre un but donné.

Ces deux directions se réduisent à une seule, déterminée par

$$\tang \alpha = \frac{2H}{x},$$

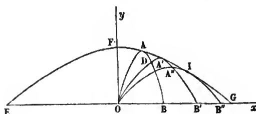
quand $$4H^2 = 4Hy + x^2. \quad (9)$$

Enfin, si les coordonnées x, y et la hauteur H satisfont à la relation

$$4H^2 < 4Hy + x^2, \quad (10)$$

il est impossible que le projectile passe par le point donné D.

5°. L'équation (6), qui est celle de la trajectoire du projectile, représente une parabole OAB ayant AC pour axe et A pour sommet. Si, dans cette équation, on fait varier l'angle α, on obtiendra



une infinité de paraboles OAB, OA'B', OA''B'', dont l'*enveloppe* sera une autre parabole EFG, représentée par l'équation (9). Si le but D est *intérieur* à cette dernière courbe, le projectile pourra évidemment l'atteindre, soit en décrivant la parabole OAB, soit en décrivant la parabole ODA'. Quand le but est sur l'enveloppe, en I par exemple, il n'existe qu'une seule direction suivant laquelle on puisse lancer le projectile. Enfin, quand le but est extérieur à EFG, le projectile ne peut plus l'atteindre. Ces dernières circonstances sont exprimées algébriquement par les relations (8), (9), (10).

6°. Entre les équations (1), (2), éliminons l'angle α; l'équation

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = a^2 t^2 \quad (11)$$

que nous obtenons, représente *une circonférence que le projectile rencontre au bout du temps t, quel que soit l'angle de pro-*

jection. Cette circonférence a pour centre le lieu qu'occuperait le projectile, s'il était tombé sans vitesse initiale. De plus, elle rencontre l'axe Ox au point où se trouverait le mobile, s'il avait été lancé horizontalement; ce qui devait être (*).

7°. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse v ont pour valeurs :

$$x' = a\cos\alpha, \quad y' = a\sin\alpha - gt;$$

donc $$v^2 = a^2\cos^2\alpha + (a\sin\alpha - gt)^2. \quad (12)$$

D'après la forme du second membre : *la vitesse commence par décroître; elle devient minimum quand le projectile passe au sommet de la parabole qu'il décrit; elle croît ensuite; enfin, le mobile frappe le sol avec une vitesse égale à sa vitesse initiale.*

8°. Le projectile étant sollicité seulement par son poids, l'*accélération totale* w (65) est égale à g, en valeur absolue.

9°. Quant à l'*accélération tangentielle* et à l'*accélération centripète,* leurs expressions n'ont rien de remarquable.

138. Problème V. — *Sachant que l'attraction exercée par une sphère, sur un point extérieur, est la même que si la masse de la sphère était concentrée en son centre, on demande de calculer :*

1°. *Le rapport des poids d'une même masse, à la surface de Jupiter et à la surface de la terre;*

2°. *La valeur de la gravité, à la surface de Jupiter;*

3°. *La longueur du pendule qui battrait les secondes sur cette planète.*

1°. D'après la loi de la gravitation universelle, les attractions exercées sur une molécule m, par deux points matériels A, B, sont proportionnelles aux masses M, M' de ces deux points, et inversement proportionnelles aux carrés des distances mA, mB. Il résulte de là, et de la propriété indiquée dans l'énoncé, que si une même masse m était transportée, successivement, sur la terre et sur Jupiter, les poids p, p' accusés par un dynamomètre auquel cette masse serait suspendue (93), satisferaient à la relation

$$\frac{p'}{p} = \frac{M'}{M} \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^2,$$

(*) On peut encore remarquer que *toutes les circonférences représentées par l'équation* (11) *sont tangentes à la parabole* (9).

r, r' étant les rayons de la terre et de Jupiter.

Or, $$\frac{M'}{M} = \frac{354936}{1050}, \quad \frac{r}{r'} = \frac{1}{11,225};$$

donc $$\frac{p'}{p} = \frac{354936}{1050} \cdot \frac{1}{(11,225)^2}.$$

Effectuant par logarithmes, on trouve

$$\frac{p'}{p} = 2,6828.$$

Ainsi, un poids d'un kilogramme, transporté de la terre sur Jupiter, tendrait le dynamomètre jusqu'au point correspondant à $2\,682^{g},8$.

2°. Les poids p, p' sont entre eux comme les accélérations correspondantes g, g' (*). Par conséquent, la *gravité* à la surface de Jupiter a pour expression :

$$g' = g.2,6828;$$

ou, à cause de $g = 9^{m},80896$,

$$g' = 26^{m},3155.$$

3°. Les longueurs l, l' de deux pendules qui battraient les secondes à Paris et sur Jupiter, sont proportionnelles à g et g' (**).

Donc $$l' = l.2,6828;$$

et comme $l = 0^{m},993855$,

$$l' = 2^{m},66631 \text{ (***)}.$$

(*) Parce que $m = \frac{p}{g} = \frac{p'}{g'}$.

(**) En vertu de la formule de Galilée :

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

formule qui sera démontrée plus loin.

(***) Le lecteur s'étonnera peut-être que le rapport $\frac{p'}{p}$ ne soit pas plus grand, mais il lui suffira de faire attention que, si la masse de Jupiter était égale à celle de la terre, l'attraction, à la surface de la première

CHAPITRE X.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT MATÉRIEL.

Parallélogramme des forces.

139. On a vu (104) que *deux forces* F, F', *constantes en grandeur et en direction, appliquées à un point matériel m en repos, lui impriment un mouvement rectiligne uniformément accéléré, résultant des deux mouvements uniformément accélérés dus aux deux forces prises isolément.*

D'un autre côté, *si un point matériel* **m** *est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, il est soumis à l'action d'une force constante* R (102).

Il résulte évidemment, de l'ensemble de ces deux propositions, que *deux forces constantes* F, F', *appliquées à un point matériel m, peuvent être remplacées par une force unique* R.

On donne, à cette force R, le nom de *résultante* des deux forces F, F' : celles-ci sont les *composantes* de R.

En général, on appelle ***résultante*** de plusieurs forces F, F', F'', F''',..., *une force unique produisant le même effet que* F, F', F'', F''',....

140. Remarque. — *Des forces données n'ont pas toujours une résultante unique.* Par exemple, *deux forces* F, F', *non dirigées dans un même plan, n'ont pas de résultante* (*).

---

planète, serait 128 fois *moindre* qu'à la surface de la seconde. Au lieu de supposer la masse *m* transportée, successivement, sur la terre et sur Jupiter, on pourrait considérer un corps également distant des deux centres d'attraction ; et alors on trouverait

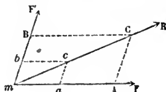
$$\frac{p'}{p} = \frac{354\,936}{1\,050} = 338.$$

(*) Nous engageons le lecteur à chercher la démonstration de cette proposition.

141. Revenons au cas de deux forces constantes F, F' appliquées à un point matériel m. La relation entre les composantes et la résultante est exprimée par le théorème suivant, connu sous le nom de *Parallélogramme des forces:*

La résultante R *de deux forces* F, F' *appliquées à un point materiel* m, *est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale* mC *du parallélogramme construit sur les droites* mA, mB, *qui représentent, en grandeur et en direction, les deux composantes.*

Soit ma l'accélération du mouvement uniformément varié qui serait produit par la force F si elle agissait seule. Semblablement, soit mb l'accélération du mouvement dû à la force F' agissant seule: la diagonale mc du parallélogramme $macb$ représentera l'accélération w du mouvement résultant, dû à la force inconnue R. De plus, la direction de w est précisément celle de R (88).



Remarquons à présent que, d'après un théorème démontré (111),

$$\frac{F}{ma} = \frac{F'}{mb} = \frac{R}{mc}, \quad (1)$$

et, en vertu de l'hypothèse,

$$\frac{F}{mA} = \frac{F'}{mB}.$$

On conclut, de ces deux suites de rapports égaux,

$$\frac{ma}{mA} = \frac{mb}{mB};$$

ainsi, les deux parallélogrammes $macb$, mACB sont semblables, et les points m, c, C sont en ligne droite. Par suite, *la diagonale* mC *représente, en direction, la résultante* R.

Elle la représente aussi en grandeur. En effet, la similitude des deux parallélogrammes donne

$$\frac{ma}{mA} = \frac{mb}{mB} = \frac{mc}{mC};$$

d'où, à cause de la suite (1),

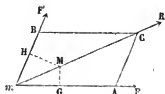
$$\frac{F}{mA} = \frac{F'}{mB} = \frac{R}{mC}.$$

Mais, mA, mB représentent les intensités des forces F, F'; donc il en est de même pour mC, relativement à la résultante R.

142. *Remarques.* — I. La démonstration précédente suppose le point m en repos; mais la proposition est générale; car *l'effet des forces* F, F', R *est indépendant de l'état de repos ou de mouvement du point* (97).

II. Une force variable pouvant toujours être supposée constante pendant un certain temps, pourvu que ce temps soit suffisamment petit, le théorème subsiste pour des forces quelconques.

143. *Autres relations entre la résultante et les deux composantes.* — *Soient* F, F' *deux forces appliquées à un point matériel* m; *soit* R *leur résultante :*



1°. *Chacune des trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les directions des deux autres;*

2°. *Les distances* MG, MH *d'un point* M *de la résultante aux deux composantes, sont en raison inverse des intensités de ces composantes.*

En effet :

1°. Le triangle mBC donne

$$\frac{BC}{\sin BmC} = \frac{mB}{\sin mCB} = \frac{mC}{\sin mBC},$$

ou, en remplaçant les côtés par les forces auxquelles ils sont proportionnels,

$$\frac{F}{\sin(F', R)} = \frac{F'}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, F')}.$$

2°. Les triangles rectangles MGm, MHm donnent

$$\frac{MG}{MH} = \frac{(\sin F, R)}{(\sin F', R)},$$

ou, en vertu de la proportion précédente,

$$\frac{MG}{MH} = \frac{F'}{F}.$$

144. *Remarque.* — La recherche de la résultante R des deux forces F, F′ équivaut à la résolution du parallélogramme mACB, ou simplement à la résolution du triangle mBC, dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris. Ce triangle donne

$$\overline{mC}^2 = \overline{mB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\, mB . BC \cos mBC;$$

ou, en remplaçant les lignes par les forces qu'elles représentent, et en faisant attention que mBC est le supplément de BmA :

$$R^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos(F, F'). \quad (1)$$

La résultante étant ainsi déterminée en *grandeur* (*), on la déterminera, en *direction*, par les proportions

$$\frac{F}{\sin(F', R)} = \frac{F'}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, F')}. \quad (2)$$

Si les composantes F, F′ sont rectangulaires, les relations (1) et (2) se simplifient; elles donnent

$$R = \sqrt{F^2 + F'^2}, \quad (3)$$

$$F = R\cos(F, R), \quad F' = R\cos(F', R). \quad (4)$$

145. Le théorème du *Parallélogramme des forces* donne lieu aux corollaires suivants, analogues à ceux que nous avons déduits du *Parallélogramme des vitesses* et du *Parallélogramme des accélérations:*

I. — *La résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point est représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés*

(*) La formule (1) donne pour R deux valeurs égales et de signes contraires; mais on doit adopter seulement la valeur positive, attendu que l'*intensité* d'une force, c'est-à-dire son rapport à l'unité de force, ne peut pas être négatif. Quand on affecte une force du double signe ±, on a égard, tout à la fois, à la grandeur de cette force et aux deux sens opposés dans lesquels elle peut agir. Ici il n'y a pas d'ambiguïté : la résultante R agit de m vers C.

sont égaux et parallèles à ceux qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.

II. *La résultante de trois forces appliquées à un même point, et non situées dans un même plan, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction.*

III. *Étant donnée une force* R, *on peut toujours, d'une infinité de manières, la décomposer en d'autres forces dont les directions passent par le point d'application de la première* (*).

IV. *La résultante de plusieurs forces appliquées à un même point, et dirigée suivant une même droite, est égale à la somme algébrique des composantes.*

V. Si, dans les équations du n° 50, on remplace les vitesses v_1, $v_2, \ldots, v_n$, par des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ appliquées à un même point, on obtient les formules suivantes, qui déterminent, en grandeur et en direction, la résultante R de ces forces :

$$R\cos a = \Sigma F\cos\alpha,\quad R\cos b = \Sigma F\cos\beta,\quad R\cos c = \Sigma F\cos\gamma,$$
$$R^2 = (\Sigma F\cos\alpha)^2 + (\Sigma F\cos\beta)^2 + (\Sigma F\cos\gamma)^2.$$

Conditions de l'équilibre d'un point matériel.

146. Avant de chercher les *conditions de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un point matériel*, nous rappellerons quelques propositions :

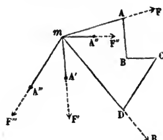
1°. *On dit que des forces se font équilibre, quand elles se neutralisent réciproquement, de manière à ne pas modifier l'état de repos ou de mouvement du corps qu'elles sollicitent* (90);

2°. *Pour que deux forces, appliquées à un point matériel entièrement libre* (**), *se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées* (96);

(*) Cet énoncé est soumis à deux restrictions : 1° *Si les directions données sont dans un même plan, dans lequel ne soit pas située la force* R, *la décomposition est impossible; 2° si les directions données se réduisent à deux, situées dans un même plan avec la force* R, *la décomposition est possible, mais d'une seule manière.*

(**) Un corps est dit *entièrement libre* dans l'espace, quand rien ne s'oppose au mouvement que tendent à lui imprimer les forces qui lui

3°. *Plusieurs forces* F, F', F'',..., *appliquées à un point matériel m, se réduisent, en général, à une force unique* R *représentée, en grandeur et en direction, par le dernier côté d'un polygone fermé dont les autres côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent les composantes, en grandeur et en direction* (145).



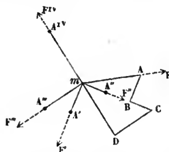
147. De ces principes, on conclut le théorème suivant :

Pour que plusieurs forces F, F', F'',..., *appliquées à un point matériel m, se fassent équilibre, il faut et il suffit que le polygone dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites qui représentent ces forces, soit fermé.*

En effet :

1° Si, comme dans la figure du numéro précédent, le polygone *m*ABCD est *ouvert*, les forces F, F', F'', F''' auront une résultante R, représentée par la droite *m*D qui *ferme* le polygone ;

2° Si, au contraire, le polygone *m*ABCD*m* est *fermé*, son dernier côté D*m*, prolongé d'une quantité égale, représente la force F^{IV}, laquelle est égale et directement opposée à la résultante R des autres forces F, F', F'', F''' : car cette résultante serait représentée par *m*D. Les deux forces F^{IV}, R se font donc équilibre (146, 2°), ou, ce qui est équivalent, il y a équilibre entre toutes les forces F, F', F'', F''', F^{IV}.



148. Il résulte de cette dernière démonstration, que l'on peut énoncer en ces termes la proposition précédente :

Pour que plusieurs forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que l'une quelconque d'entre

---

sont appliquées, c'est-à-dire quand il ne renferme ni *point fixe*, ni *axe fixe*, etc. : une machine est le contraire d'un pareil corps.

elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres (*).

149. Enfin, on peut dire encore que :

Des forces, appliquées à un point matériel, se font équilibre si leur résultante est nulle (**).

En effet, quand le dernier sommet du *polygone des forces* s'approche indéfiniment du point d'application, la résultante diminue jusqu'à zéro.

150. *Équations de l'équilibre.* — On a trouvé, dans le n° 145 :

$$R^2 = (\Sigma F \cos\alpha)^2 + (\Sigma F \cos\beta)^2 + (\Sigma F \cos\gamma)^2.$$

Mais, pour l'équilibre des forces données, il faut et il suffit que $R = 0$ (149). Par conséquent, les *équations de l'équilibre* sont

$$\Sigma F \cos\alpha = 0, \quad (1)$$
$$\Sigma F \cos\beta = 0, \quad (2)$$
$$\Sigma F \cos\gamma = 0. \quad (3)$$

D'après ce qui précède, ces équations sont *nécessaires et suffisantes*. Ainsi :

Pour que des forces, appliquées à un point matériel, se fassent équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur trois axes rectangulaires quelconques passant par ce point, soient séparément nulles.

151. *Remarque.* — Dans la théorie précédente, rien ne fait supposer que le point matériel soit en repos : il pourrait avoir un mouvement quelconque, dû à des forces différentes de celles qui ont été considérées. Autrement dit, *les conditions de l'équilibre d'un point matériel sont indépendantes de l'état de ce point.*

(*) Cette proposition, qui est également vraie pour des forces dirigées d'une manière quelconque, est souvent regardée comme un axiome.

(**) C'est-à-dire si la droite qui devrait représenter cette résultante se réduit au point d'application.

CHAPITRE XI.

DU TRAVAIL ET DE LA FORCE VIVE.

Préliminaires.

152. *Objet principal des forces.* — Les forces dont l'industrie fait usage ont toujours pour objet, non-seulement de vaincre certaines résistances, mais encore, et surtout, de faire mouvoir les corps au moyen desquels ces résistances se manifestent. Ainsi, dans les constructions, la force musculaire de l'homme et des animaux est employée à soulever et transporter des fardeaux, à pousser des brouettes, à scier de la pierre ou du bois; dans les moulins à eau, la pesanteur, par l'intermédiaire d'une roue à palettes, fait tourner la meule et écrase le blé; dans les locomotives, la force élastique de la vapeur d'eau détruit le frottement qui s'exerce entre les roues et les rails, et, par suite, fait marcher le convoi, etc. Dans ces exemples, et dans tous ceux que l'on peut imaginer, l'*effet utile* produit se compose constamment d'une *résistance vaincue* et d'un *point d'application déplacé.*

153. *Forces perdues.* — D'après cela, une force à laquelle aucune résistance ne s'oppose, ou une force qui ne produit pas de mouvement, ne peut être d'aucune utilité : on lui donne le nom de *force perdue.* Il est facile de justifier cette expression : un ouvrier qui pousserait un mur solidement établi, ou qui ferait tourner, *à vide,* une manivelle, n'aurait droit à aucun salaire, parce que sa force musculaire serait, dans le langage habituel ou dans le langage scientifique, absolument perdue.

154. Une force n'étant utile que si elle fait mouvoir le point d'application d'une résistance, le *loyer* d'un moteur, animé ou inanimé, doit dépendre de ces deux éléments : *intensité de la résistance, espace décrit par son point d'application.* On va voir que, dans la plupart des cas, il est proportionnel à leur produit.

Considérons l'exemple très-simple d'un manœuvre hissant un bloc de pierre à l'aide d'une poulie. Pour que le bloc se meuve

uniformément, il suffit que l'effort musculaire développé par l'ouvrier soit égal au point P du fardeau. D'un autre côté, le temps pendant lequel cet effort doit être soutenu, croît comme la hauteur h à laquelle la pierre doit être amenée. On voit donc que le *travail exécuté* doit être supposé proportionnel au produit Ph, puisqu'il en serait ainsi du salaire.

Définition du travail.

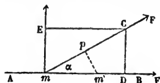
155. *Force constante; mouvement rectiligne.* — Soit un point matériel m décrivant une droite AB, sous l'action d'une force constante F, dirigée suivant AB. Dans ce cas, on appelle *travail dynamique*, ou simplement *travail* de la force F, *le produit* T *du nombre* F *qui représente l'intensité de celle-ci, par le nombre e qui représente le chemin mm' parcouru par son point d'application m.*

A m m' B F

Par exemple, le travail d'un poids P tombant verticalement d'une hauteur h est (154)

$$T = \mathfrak{F} P = Ph.$$

156. Si la force F, constante en grandeur et en direction, est oblique à la droite AB suivant laquelle se meut son point d'application m, le travail de cette force est *le produit du nombre e qui représente le chemin mm' parcouru par son point d'application, par le nombre* F' *qui représente la force* F *estimée suivant cette droite mm'.*



Il est aisé de voir que cette définition s'accorde avec la première.

Supposons, en effet, que m soit un anneau dans lequel passe une tige fixe AB. Décomposons F en une force F' dirigée suivant AB, et en une force F" perpendiculaire à AB. On peut admettre que cette dernière composante est *détruite par la résistance de la tige*, ou qu'elle rentre dans la catégorie des *forces perdues* (153).

L'effet de la force F se réduisant à celui de sa composante F', il y a donc lieu d'appeler travail de F le produit eF', lequel est le travail de F'.

157. *Remarques.* — I. La composante F' a pour valeur $F\cos\alpha$

(144). D'un autre côté, si l'on abaisse $m'p$ perpendiculaire à mC, on aura, pour valeur du *chemin estimé suivant la direction de la force*, $e' = e\cos\alpha$. Conséquemment, le travail de F est susceptible des trois formes suivantes :

$$\mathfrak{T}F = F'e, \quad \mathfrak{T}F = Fe\cos\alpha, \quad \mathfrak{T}F = Fe'.$$

II. La deuxième formule conduit à cette définition, qui comprend les deux premières : *le travail d'une force constante, agissant sur un point qui se meut en ligne droite, est le produit de la force par le chemin parcouru, et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle du chemin.*

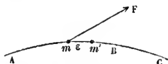
III. Les facteurs F, e étant supposés positifs, le produit $Fe\cos\alpha$ est positif ou négatif suivant que l'angle α est aigu ou obtus. Dans le premier cas, la force F accélère le mouvement; dans le second, elle le ralentit.

IV. Si l'angle α est droit, $\cos\alpha = 0$, et $\mathfrak{T}F = 0$; ce qui doit être (156).

158. Le travail est dit *moteur* ou *résistant*, suivant que la force tend à augmenter ou à diminuer la vitesse. Ainsi, quand un corps a été lancé verticalement de bas en haut, le travail de la pesanteur est *résistant* pendant que le corps s'élève; il devient *moteur* dès que le corps descend. Les raisons de ces dénominations sont évidentes.

159. Remarque. — *Le travail est moteur ou résistant, suivant qu'il est positif ou négatif.*

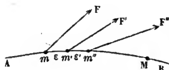
160. *Travail élémentaire d'une force quelconque.* — Soit à présent une force quelconque F, agissant sur un point dont la trajectoire est ABC. Soient m, m' deux positions de ce point, assez rapprochées pour que le petit arc mm' puisse être regardé comme confondu avec sa corde, et que la force F ait pu être supposée constante, en grandeur et en direction, pendant le temps employé à décrire mm'.



On appellera *travail élémentaire* de la force F, conformément à la définition précédente (157, II), *le produit de la force* F *par l'élément de chemin, et par le cosinus de l'angle que fait la direction de la force avec celle de l'élément;* ou encore :

Le travail élémentaire d'une force est le produit de l'élément de chemin par la projection de la force sur cet élément (*).

161. *Travail total.* — La somme des travaux élémentaires d'une force variable F, ou plutôt *la limite vers laquelle tend cette somme* quand l'élément ε diminue jusqu'à zéro, est ce qu'on appelle *travail total* de cette force. Ainsi, en supposant que le point matériel se soit transporté de m en M dans le temps θ, de manière à occuper successivement les positions m, m', m'',..., on aura, en appelant F, F', F'',..., les intensités correspondantes de la force, et α, α', α'',..., les angles Fmm', F'$m'm''$,...,



$$\mathfrak{T}F = \lim(F\varepsilon\cos\alpha + F'\varepsilon'\cos\alpha' + F''\varepsilon''\cos\alpha'' + \ldots),$$

ou
$$\mathfrak{T}F = \lim \Sigma F\varepsilon \cos\alpha.$$

Évaluation du travail total.

162. *Une force constamment perpendiculaire à l'élément de chemin parcouru par son point d'application ne produit aucun travail.*

En effet, $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha' = 0$, etc. (**).

(*) Cette considération du travail élémentaire d'une force, due à un savant géomètre, nous semble manquer de netteté. En effet, à quel moment le petit arc mm' peut-il être supposé confondu avec sa corde? On répondra, sans doute: *quand l'arc est infiniment petit*. Nous ne pouvons discuter ici la valeur de cette *solution*.

(**) Il semblerait, d'après cela, qu'*un manœuvre chargé d'un fardeau et marchant sur un terrain horizontal n'aurait droit à aucun salaire*; ce qui serait évidemment absurde. D'un autre côté, la plupart des praticiens évaluent à 97 kilogrammètres par seconde le *travail produit par un homme marchant sur un terrain horizontal sans fardeau*. Voici comment un illustre géomètre explique ce paradoxe et cette contradiction:

« Quand un homme transporte son propre poids, que j'appellerai Π, à une hauteur verticale h au-dessus de son point de départ, la quantité de travail produit est Πh...; mais *cette quantité donnerait une idée très-imparfaite des efforts musculaires qui ont été faits et de la force que cet homme a développée*. Il serait difficile d'en obtenir une mesure exacte;

163. Si la force F est constante, et qu'elle soit dirigée, à chaque instant, suivant la tangente à la trajectoire AB,

$$\mathfrak{T}\,F = F \lim \Sigma s = F s :$$

le travail total est égal, dans ce cas, *au produit de la force par le chemin,* absolument comme si le mouvement était rectiligne.

164. Lorsque la force est constante, en grandeur et en direc-

---

on peut seulement faire voir qu'*elle doit surpasser,* souvent de beaucoup, *la quantité précédente, qui serait nulle si la hauteur h était zéro,* quoique, certainement, *il y ait une quantité de travail* mécanique *correspondante à la marche d'un homme sur un plan horizontal.*

» Dans cette marche, je suppose que l'homme ait d'abord le pied gauche en avant du pied droit; son centre de gravité est alors abaissé, au-dessous de sa position naturelle, d'une quantité que je désignerai par ε. En s'appuyant sur son pied gauche et s'aidant du frottement de ce pied contre le sol, l'homme ramène son pied droit au niveau du pied gauche, puis le pied droit devance le pied gauche et va se poser sur le sol; ce qui fait un pas entier, composé de deux parties. Or, dans la première partie, l'homme soulève son centre de gravité de la hauteur ε, et produit par là une quantité de travail égale à $\Pi\varepsilon$; il imprime, au même instant, à ce point une vitesse horizontale, que je désignerai par a, à la fin du premier demi-pas; ce qui répond à une autre quantité de travail $\Pi\alpha$, en appelant α la hauteur due à la vitesse a.

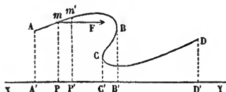
» ... Je supposerai aussi que le second demi-pas a lieu en vertu de la vitesse acquise à la fin du premier et du poids du corps qui retombe sur le sol, de manière que, pendant le second demi-pas, l'homme n'exerce plus aucun effort, et que les vitesses verticale et horizontale, dont son centre de gravité se trouve encore animé à la fin du pas entier, soient détruites par le choc et le frottement de son pied droit contre le sol. Dans cette hypothèse, la quantité de travail de l'homme pendant le pas entier sera... $\Pi(\varepsilon + \alpha)$.

» Il suit de là que, dans un nombre n de pas égaux, la quantité de travail d'un homme ou d'un animal, portant un fardeau et marchant sur une route horizontale, aura pour valeur $nK(\varepsilon + \alpha)$, en désignant par K son poids Π, augmenté de celui du fardeau. Si le poids total a été élevé verticalement à une hauteur h au-dessus du point de départ, il faudra ajouter Kh à la quantité $nK(\varepsilon + \alpha)$. » (Poisson, *Traité de Mécanique.*)

Sans altérer le sens, nous avons modifié le texte en quelques points, afin d'abréger.

tion, *le travail total est égal au produit de la force par la projection du chemin, faite sur la direction de la force.*

En effet, $\mathfrak{T}F = F \lim \Sigma \varepsilon \cos\alpha = F\Sigma PP' = FA'D'$.

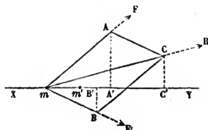


165. En particulier, *le travail de la pesanteur est égal au poids du mobile, par la hauteur verticale dont il est descendu ou monté.*

166. Dans le cas général, l'évaluation du travail total dépend d'une *quadrature* (*D. D.*, 342). En effet, si l'on porte, sur un axe, les petites cordes ε, ε', ε'',..., les unes à la suite des autres; que, par les points ainsi déterminés, on élève des ordonnées égales, respectivement, à $F\cos\alpha$, $F'\cos\alpha'$, $F''\cos\alpha''$,...; et que l'on fasse passer une courbe par les extrémités de ces droites: l'aire de cette courbe représentera le travail cherché. Les *formules approximatives de quadratures* (*) peuvent aussi être employées avec avantage.

Travail de la résultante de plusieurs forces.

167. Théorème. — *Le travail élémentaire de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel, est égal à la somme des travaux des composantes.*



Pour composer des forces F, F', F'',..., en nombre quelconque, appliquées à un point matériel, on peut chercher la résultante r de F et de F', puis la résultante r' de r et de F''; et ainsi de suite. D'après cela, il suffit de démontrer la proposition dans le

(*) *Voyez* l'*Appendice* à la fin.

cas de deux forces F, F′, représentées par les côtés mA, mB du parallélogramme $mACB$.

Soit XY la droite que décrit, au moins pendant un temps très-court, le point d'application m : cette droite n'est pas nécessairement dans le plan du parallélogramme. Si nous abaissons sur XY les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, nous aurons, pour les travaux élémentaires de F, de F′, et de la résultante R :

$$mm'.mC', \quad mm'.mA', \quad mm'.mB'.$$

Il s'agit donc de vérifier l'égalité

$$mm'.mC' = mm'.mA' + mm'.mB',$$

ou seulement celle-ci :

$$mC' = mA' + mB'.$$

Or *la projection* mC' *de la résultante est égale à la somme des projections* mA', mB' *des composantes;* donc le théorème est démontré.

168. Le travail total d'une force pouvant être regardé comme la somme de ses travaux élémentaires, le théorème précédent s'étend évidemment au travail total de plusieurs forces, appliquées à un point matériel. Ainsi : *le travail total de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes.*

Unités de travail. — Effort moyen.

169. *Kilogrammètre.* — La relation entre la force F, l'espace e et le travail T est, dans le cas le plus simple,

$$T = Fe.$$

Si l'on prend $F = 1$, $e = 1$, on aura $T = 1$. Or, l'unité de force est le kilogramme, l'unité d'espace est le mètre; par conséquent, *le travail pris pour unité est celui qui est nécessaire pour élever 1 kilogramme à 1 mètre de hauteur.* Cette unité est appelée *kilogrammètre.* On la représente par 1^{km}. Quand une force de 60 kilogrammes fait parcourir $3^{m},5$ à son point d'application, le travail de cette force est égal à (60.3,5) kilogrammètres $= 210^{km}$.

170. *Cheval-vapeur.* — Le travail d'une force, tel qu'il vient d'être défini, est indépendant du temps pendant lequel agit la force. Dans les applications, il n'est plus permis de faire abstrac-

tion de cet élément; au contraire, plus le temps pendant lequel le travail aura été produit sera court, plus le moteur employé devra être *payé*. On prend ordinairement, pour unité de *puissance dynamique*, un travail de 75^{km} effectué en 1 seconde. Cette unité, pour une raison qu'il n'est pas nécessaire d'indiquer ici, est ce qu'on appelle *cheval-vapeur*.

Si une machine a élevé 2400 kilogrammes à une hauteur de 30 mètres en 48 secondes, elle a produit, pendant ce temps, un travail de (2400.30) kilogrammètres. Son travail serait donc, en une seconde, $\frac{2400.30}{48}$ kilogrammètres $= 1500^{km}$. Conséquemment, cette machine équivaut à $\frac{1500}{75} = 20$ *chevaux-vapeur*. C'est ce qu'on exprime ordinairement en disant que la machine a une *force* de 20 chevaux (*).

En général, si un moteur est capable d'élever, en n secondes, un poids de P kilogrammes à une hauteur de h mètres, la *force*, ou plutôt la *puissance dynamique* de ce moteur, évaluée en chevaux-vapeur, sera

$$D = \frac{Ph}{75n} = \frac{T}{75n}.$$

171. *Remarque.* — Un *cheval-vapeur* équivaut à peu près à 5,5 chevaux effectifs; c'est-à-dire qu'*il faudrait environ 55 chevaux pour élever, en 1 seconde, un poids de 750 kilogrammes à 1 mètre de hauteur.*

172. *Effort moyen.* — Il arrive souvent que la force variable F reste comprise entre des limites peu éloignées. Dans ce cas, on y substitue, pour plus de commodité, une force fictive constante φ, capable de produire le même travail. Cette force φ, dont la direction est supposée tangente à la trajectoire du point matériel, est appelée *effort moyen*. Il est aisé de justifier cette dénomination. En effet, si l'on suppose aussi que la force F agisse tangentiellement à la trajectoire, on aura

$$\mathfrak{T}F = \lim \Sigma F\varepsilon, \quad \mathfrak{T}\varphi = \varphi \lim \Sigma \varepsilon;$$

(*) Le mot *force* n'a plus ici sa signification habituelle; pour éviter toute ambiguïté, on devrait dire : *une machine de la puissance dynamique de 20 chevaux-vapeur.*

et, puisque les travaux sont égaux,

$$\varphi = \frac{\lim \Sigma F \varepsilon}{\lim \Sigma \varepsilon};$$

donc la force φ est une *moyenne* entre les forces F (20).

173. *Remarque.* — L'effort moyen φ est représenté, graphiquement, par la hauteur du rectangle équivalent à l'aire qui mesure le travail total (166), et qui a pour base la base de cette aire.

Relation entre le travail et la force vive.

174. Les géomètres du siècle dernier ont donné le nom de *force vive* d'un mobile au produit mv^2 de sa masse par le carré de sa vitesse. Il existe, entre le travail développé par la force F qui agit sur le mobile, et la force vive dont ce mobile est animé à l'instant considéré, une relation remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsqu'une force agit sur un point matériel, la demi-variation de force vive du mobile, entre deux positions quelconques, est égale au travail de la force entre ces deux positions.

175. Pour démontrer ce théorème, supposons d'abord que le point matériel soit sollicité seulement par son poids p, et qu'il tombe librement suivant la verticale.

En désignant par v_0, v les vitesses dont il est animé après avoir parcouru les espaces h_0, h, nous aurons (33)

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h - h_0),$$

ou

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = mg(h - h_0).$$

Mais mg est le poids du mobile (112); $h - h_0$ est l'espace compris entre les deux positions considérées; et le travail de la pesanteur, entre les époques correspondantes, a pour valeur $p(h - h_0)$ (155); etc.

176. Plus généralement, considérons un point matériel sollicité par une force constante F, dirigée suivant la trajectoire rectiligne. Soient v_0, v les vitesses du mobile, au bout des temps t_0, t; e l'espace décrit pendant le temps $t - t_0$; w l'accélération du mouve-

ment. Nous aurons, en appelant a la vitesse initiale,

$$v = a + wt, \quad v_0 = a + wt_0,$$

$$e = a(t - t_0) + \frac{1}{2} w(t^2 - t_0^2) = (t - t_0)\frac{v + v_0}{2};$$

donc

$$v - v_0 = w(t - t_0),$$

$$\frac{1}{2}(v + v_0) = \frac{e}{t - t_0};$$

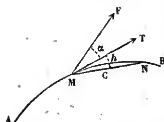
puis

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = mwe = \mathrm{F}e,$$

ou

$$\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \mathfrak{T}.\mathrm{F}.$$

177. Soit enfin un point matériel décrivant une trajectoire quelconque AB, sous l'influence d'une force variable F. Remplaçons la courbe AB par une trajectoire polygonale, dont $\mathrm{MN} = c$ représente un élément quelconque. Nommons F_0, F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ les valeurs de F qui répondent aux sommets consécutifs de ce polygone. Soient $v_0, v_1, \ldots, v_n$ les valeurs correspondantes de la vitesse v, etc. Si les forces



$$\mathrm{F}_0, \quad \mathrm{F}_1, \ldots, \quad \mathrm{F}_n$$

restaient constantes, en grandeur et en direction, pendant que la masse m décrit les cordes

$$c_0, \quad c_1, \ldots, \quad c_n,$$

nous aurions, par le numéro précédent,

$$\frac{1}{2} m(v_1^2 - v_0^2) = \mathrm{F}_0 c_0 \cos(\alpha_0 + h_0),$$

$$\frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \mathrm{F}_1 c_1 \cos(\alpha_1 + h_1),$$

....

$$\frac{1}{2} m(v_n^2 - v_{n-1}^2) = \mathrm{F}_n c_n \cos(\alpha_n + h_n);$$

d'où $$\frac{1}{2}m(v_n^2 - v_0^2) = \Sigma F c \cos(\alpha + h).$$

A mesure que le nombre n augmente, le second membre tend vers (161)

$$\lim \Sigma F c \cos(\alpha + h) = \mathfrak{T}.F;$$

donc, en remplaçant v_n par v:

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \mathfrak{T}.F = T.$$

178. Corollaire. — *Le travail* T *de la force* F *étant considéré comme une fonction du temps, la dérivée de cette fonction est égale au produit de la masse par la vitesse et par la dérivée de la vitesse.* En effet, l'équation précédente donne

$$\frac{1}{2}m.2vv' = T'.$$

Principe des forces vives.

179. Nous allons reprendre, sous un point de vue un peu différent, les théories précédentes, de manière à en conclure le *principe de la conservation des forces vives*, principe fondamental en Mécanique.

Soit, au bout du temps t, F la force qui sollicite le point matériel, dont la masse est m. Soient X, Y, Z les composantes de cette force, parallèles à trois axes rectangulaires.

D'après le principe de l'*indépendance des effets produits par plusieurs forces* (103), le mouvement de la projection du point m, sur chacun des axes, est uniquement dû à la composante parallèle à cet axe. Donc, en désignant par x, y, z les coordonnées du point, nous aurons (114)

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z. \quad (1)$$

Ajoutons ces trois équations (*) après les avoir multipliées res-

(*) Les relations (1) sont les *équations du mouvement d'un point matériel.* Dans chaque cas particulier, il s'agit d'en conclure les valeurs de x, y, z, x', y', z' *en fonction du temps* t *et de six constantes arbitraires*: c'est là un problème de Calcul intégral.

pectivement par x', y', z'; nous aurons encore

$$m(x'x''+y'y''+z'z'')=Xx'+Yy'+Zz';$$

ou, en nous rappelant que $x'x''+y'y''+z'z''=s's''=vv'$,

$$mvv'=Xx'+Yy'+Zz'. \quad (2)$$

Cela posé, *si le second membre* de cette dernière équation *est la dérivée d'une fonction* φ *de* x, y, z, on aura, en remontant des dérivées aux fonctions primitives,

$$\frac{1}{2}mv^2=\varphi(x,y,z)+\text{const.},$$

c'est-à-dire, en désignant par v_0, x_0, y_0, z_0 des valeurs correspondantes de v, x, y, z,

$$mv^2-mv_0^2=2\varphi(x,y,z)-2\varphi(x_0,y_0,z_0). \quad (3)$$

Ainsi, en admettant l'hypothèse établie tout à l'heure : 1° *quand le mobile passe d'une position à une autre, l'accroissement de sa force vive dépend uniquement de ces deux positions extrêmes, et non de la route qu'il a suivie;* 2° *toutes les fois que le mobile repasse par la même position, il reprend la même vitesse* (*).

Cette dernière propriété constitue le *principe de la conservation des forces vives*.

180. *Remarques.* — I. En comparant les valeurs de mvv', trouvées dans les deux numéros précédents, on obtient

$$T'=Xx'+Yy'+Zz'. \quad (4)$$

Pour vérifier directement cette relation, il suffit de mettre le second membre sous la forme

$$Fs'\left(\frac{X}{F}\cdot\frac{x'}{s'}+\frac{Y}{F}\cdot\frac{y'}{s'}+\frac{Z}{F}\cdot\frac{z'}{s'}\right).$$

La quantité entre parenthèses est égale au cosinus de l'angle α formé par la direction de F et par la tangente à la trajectoire. De

(*) Pourvu, bien entendu, que $\varphi(x,y,z)$ ne puisse pas prendre deux valeurs différentes pour un même système de valeurs des coordonnées x, y, z. (J. Bertrand, *Journal de l'École Polytechnique*, 28e cahier.)

plus,

$$F = mw, \quad w\cos\alpha = v'(^*), \quad s' = v.$$

Donc

$$T' = mvv';$$

comme ci-dessus.

II. De même, en égalant les deux valeurs trouvées pour l'accroissement de la force vive, on obtient

$$\mathfrak{T}.F = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0). \quad (5)$$

Surfaces de niveau.

181. Puisque, d'après l'équation (3), la vitesse *actuelle* du point matériel m dépend seulement de sa vitesse initiale, de sa position initiale et de sa position actuelle, il en résulte que *différents mobiles, ayant la même masse* m, *partis du point* (x_0, y_0, z_0) *avec la vitesse* v_0, *seront animés de vitesses égales quand ils occuperont des positions pour lesquelles la fonction* $\varphi(x, y, z)$ *aura une même valeur* λ. Autrement dit, *ces mobiles auront des vitesses égales, lorsqu'ils rencontreront la surface* S *représentée par*

$$\varphi(x, y, z) = \lambda, \quad (6)$$

λ étant un paramètre arbitraire (**).

La même propriété subsiste, si les points matériels considérés, au lieu d'avoir une même position initiale, sont partis, avec la vitesse v_0, de différents lieux situés sur la surface particulière S_0 qui répond à une valeur λ_0 du paramètre λ. On a donc ce théorème général :

Si différents mobiles, ayant des masses égales, sont soumis à une même force, et qu'ils partent, avec la même vitesse, de différents points situés sur la surface S_0, *ils seront animés de vitesses égales quand ils atteindront la surface* S.

182. Les surfaces S, représentées par l'équation (1), jouissent d'une autre propriété remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

La force F, *appliquée au point matériel m, est normale à la surface* S *passant en ce point.*

(*) On ne doit pas oublier que la composante tangentielle de l'*accélération totale* w, c'est-à-dire l'*accélération tangentielle*, est égale à v'.

(**) En général, le temps t au bout duquel auront lieu la rencontre, ne sera pas le même pour tous les points.

Pour la démontrer, rappelons-nous que, par hypothèse,

$$Xx'+Yy'+Zz'$$

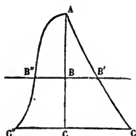
est la dérivée de $\varphi(x, y, z)$, obtenue en regardant x, y, z comme des fonctions quelconques de t : ainsi

$$X=\varphi'_x,\quad Y=\varphi'_y,\quad Z=\varphi'_z.$$

D'un autre côté, la normale à la surface S fait, avec les trois axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$ (*T. D.*, 205) ou à X, Y, Z : cette normale coïncide donc, en direction, avec la force F.

183. *Remarques.* — I. Si le point matériel m, sollicité par la force F, était *posé, sans vitesse initiale*, sur la surface S, il resterait en repos, pourvu que la surface eût une résistance suffisante : pour cette raison, on a donné, aux surfaces dont il s'agit, le nom de *surfaces de niveau* (*).

II. *Dans le cas de la pesanteur, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux.*



En effet, à cause de

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=mg,$$

la fonction φ se réduit à mgz. Donc *différents mobiles pesants, partis d'un même point* A, *et assujettis à se mouvoir sur diverses lignes* ABC, AB′C′, AB″C″,..., *auront des vitesses égales, quand ils atteindront un même plan horizontal* BB′B″ (**).

Réaction des surfaces ou des lignes.

184. Jusqu'à présent, nous avons supposé que le point matériel considéré était *entièrement libre dans l'espace;* mais il peut arri-

(*) Par analogie avec ce qui a lieu pour la pesanteur : *la direction de cette force est normale à la surface des eaux tranquilles.*

(**) On verra, tout à l'heure, que *la résistance de la courbe ou de la surface* sur laquelle se meut le point matériel, *n'altère pas la vitesse due à la force extérieure qui le sollicite.*

ver qu'un point soit *assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface donnée.* Si l'on fait abstraction du *frottement,* dont nous parlerons plus tard, on peut aisément ramener le second cas au premier. Effectivement, *une surface polie ne peut détruire que les forces qui lui sont normales* (*); donc elle agit, sur le point matériel, comme le ferait une force *normale* N, qui tendrait à éloigner le point de la surface. En joignant cette force *inconnue* aux forces données, on retombera, comme nous venons de le dire, sur la recherche du mouvement d'un point entièrement libre.

De même, si le point est astreint à parcourir une ligne donnée, on joindra, aux forces qui le sollicitent, une force normale N, *de direction et de grandeur inconnues,* représentant la réaction de la courbe.

185. Théorème. — *Le travail des forces appliquées à un point qui se meut sur une surface donnée ou sur une ligne donnée, n'est pas altéré par la réaction de cette surface ou de cette ligne.*

En effet, cette réaction étant normale à la trajectoire, ne produit aucun travail.

186. D'après l'équation (5), appliquée à la résultante R de la force donnée F et de la réaction N, on a

$$2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0) = \mathcal{T}R = \mathcal{T}F + \mathcal{T}N;$$

ou, par le théorème précédent,

$$2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0) = \mathcal{T}.F;$$

ou enfin $m(v^2 - v_0^2) = 2\varphi(x, y, z) - 2\varphi(x_0, y_0, z_0).$

Ainsi le principe des forces vives subsiste, sans modification, dans le cas d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface. En particulier : *Si un point matériel, en mouvement sur une surface ou sur une courbe donnée, n'est sollicité par aucune force extérieure, sa vitesse est constante* (**).

(*) Nous reviendrons plus loin sur ce principe, que l'expérience démontre suffisamment.

(**) On fait toujours abstraction du frottement.

CHAPITRE XII.

APPLICATIONS.

187. Problème I. — *Déterminer le mouvement vertical d'un point matériel* M, *de masse* m, *attiré par le centre* C *de la terre, en raison inverse du carré de la distance* CM.

Si le point matériel était placé en B, à la surface de la terre, il serait sollicité par son poids mg. Quand il est en M, la force F à laquelle il est soumis a donc pour expression $mg\left(\frac{CB}{CM}\right)^2$, ou $mg\frac{R^2}{x^2}$. D'un autre côté,

$$F = -mx'',$$

puisque le mouvement a lieu de A vers B, A étant la position initiale du mobile. Par conséquent,

$$x'' = -g\frac{R^2}{x^2}. \quad (1)$$

188. Pour tirer, de cette équation, *la relation entre la vitesse* v *et la distance*, on multiplie les deux membres par $x' = v$, après quoi l'on prend les fonctions primitives (*). On obtient ainsi

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{x} + \text{const.}$$

Soit h la hauteur du point de départ A au-dessus de la surface de la terre : le mobile ayant été abandonné à lui-même, on a

$$0 = 2g\frac{R^2}{R+h} + \text{const};$$

et, par suite, $$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+h}\right). \quad (2)$$

189. D'après cette formule, la vitesse que possède le mobile, au

(*) Ce calcul est celui qui donne le principe des forces vives (179).

moment où il vient frapper le sol, est

$$V = \sqrt{2gh\frac{R}{R+h}}. \quad (3)$$

En général, la hauteur h est fort petite, relativement au rayon R; donc, à très-peu près,

$$V = \sqrt{2gh},$$

ainsi qu'on devait s'y attendre (*).

190. L'espace $AM = z = R + h - x$; de plus, $v = z'$; donc, à cause de l'équation (2) :

$$z' = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}\sqrt{\frac{z}{R+h-z}},$$

ou

$$z'\sqrt{\frac{R+h-z}{z}} = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}.$$

Le second membre est évidemment la dérivée de $Rt\sqrt{\frac{2g}{R+h}}$. Le premier membre est la dérivée d'une certaine fonction de z. Pour la déterminer, posons

$$z = (R+h)\sin^2\varphi \; (^{**}) \quad (4);$$

nous aurons

$$z'\sqrt{\frac{R+h-z}{z}} = 2(R+h)\cos^2\varphi . \varphi' = (R+h)(1+\cos 2\varphi)\varphi';$$

puis

$$(R+h)\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) = Rt\sqrt{\frac{2g}{R+h}} \; (^{***}),$$

ou

$$t = \frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right). \quad (5)$$

(*) La valeur exacte de V est comprise entre

$$\sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{h}{2R}\right).$$

(**) Ce procédé est celui qu'on emploierait pour rendre le radical calculable par logarithmes.

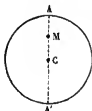
(***) On n'ajoute pas de constante, parce que $t = 0$ répond à $z = 0$.

191. Si, aux équations (4) et (5), on joint la valeur de v, que l'on peut écrire ainsi :

$$v = R\sqrt{\frac{2g}{R+h}}\tan\varphi, \quad (6)$$

on aura la solution complète du problème.

192. Problème II. — *Quel serait le mouvement d'un point matériel* M, *dans un puits* ACA' *qui passerait par le centre* C *de la terre, l'attraction étant supposée proportionnelle à la distance* CM (*)?



En opérant comme dans le premier problème, on trouve, successivement,

$$-x'' = g\frac{x}{R}, \quad (1)$$

$$v^2 = \frac{g}{R}(R^2 - x^2), \quad (2)$$

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\arc\cos\frac{x}{R}. \quad (3)$$

193. *Remarques.* — I. La vitesse v s'annule pour $x = \pm R$. Par conséquent, le mobile, parti du point A, irait jusqu'au point A', diamétralement opposé, après quoi il reviendrait au point de départ, et ainsi de suite indéfiniment, en exécutant des oscillations *isochrones*.

II. Le temps d'une oscillation serait $T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 42^{m}\,11^{s}$.

III. Le mobile, au moment où il passerait par le centre de la terre, serait animé d'une vitesse de $7902^{m},3$ par seconde.

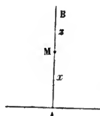
194. Problème III. — *Déterminer le mouvement ascendant d'un point matériel pesant* M, *lancé dans une direction verticale, en ayant égard à la résistance de l'air, supposée proportionnelle au carré de la vitesse du mobile.*

A chaque instant, le mobile est soumis à l'action *retardatrice* de son poids mg (**) et de la résistance de l'air, résistance que l'on

(*) Cette loi est celle que l'on trouve quand on cherche l'attraction exercée par une sphère solide sur un point intérieur.

(**) On admet que la hauteur AM est très-petite, relativement au rayon de la terre.

peut représenter par $mg\frac{v^2}{b^2}$, b étant une certaine longueur. Par conséquent, l'équation du mouvement est



$$-x'' = g\left(1 + \frac{v^2}{b^2}\right),$$

ou
$$-b^2 \frac{v'}{b^2 + v^2} = g. \quad (1)$$

Elle donne

$$\frac{gt}{b} = \text{arc tang}\,\frac{a}{b} - \text{arc tang}\,\frac{v}{b}, \quad (2)$$

a étant la vitesse initiale.

195. De l'équation (2), on conclut aisément

$$v = b\,\frac{a\cos\frac{gt}{b} - b\sin\frac{gt}{b}}{b\cos\frac{gt}{b} + a\sin\frac{gt}{b}};$$

ou, en posant
$$\frac{a}{b} = \text{tang}\,\alpha, \quad (3)$$

$$v = b\,\text{tang}\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right). \quad (4)$$

196. Si l'on met cette dernière équation sous la forme

$$x' = b\,\frac{\sin\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)},$$

on obtient, en prenant les fonctions primitives des deux membres,

$$x = \frac{b^2}{g}\,l\,\frac{\cos\left(\alpha - \frac{gt}{b}\right)}{\cos\alpha}. \quad (5)$$

197. La hauteur h à laquelle parvient le mobile, et le temps t_1 qu'il emploie pour atteindre le point culminant B, sont donnés par les formules

$$t_1 = \frac{b\alpha}{g}, \quad (6) \qquad h = -\frac{b^2}{g}\,l.\cos\alpha. \quad (7)$$

198. Problème IV. — *Les données étant les mêmes que dans le problème précédent, déterminer le mouvement descendant du point matériel* M.

Après que le mobile est arrivé au point B, il redescend en vertu de l'excès de son poids sur la résistance de l'air. Par conséquent, l'équation (1) du n° **194** doit être remplacée par

$$b^2 \frac{v'}{b^2 - v^2} = g. \quad (8)$$

Si l'on décompose $\frac{1}{b^2 - v^2}$ en $\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{b-v} - \frac{1}{b+v}\right)$, on trouve aisément

$$2\frac{gt}{b} = l\frac{b+v}{b-v}; \quad (9)$$

d'où, en posant

$$\frac{g}{b} = k, \quad (10)$$

$$v = b\frac{e^{2kt} - 1}{e^{2kt} + 1}. \quad (11)$$

199. Pour trouver la fonction primitive du second membre, il suffit de le mettre sous la forme $b\frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}}$; on obtient ainsi

$$z = \frac{b}{k} l \frac{(e^{kt} + e^{-kt})}{2}, \quad (12)$$

z étant l'espace parcouru par le mobile.

200. A cause des formules (3) et (7), le temps t_2 de la chute est donné par l'équation

$$e^{kt_2} + e^{-kt_2} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

Posons, pour abréger, $e^{kt_2} = u$; nous la transformerons en

$$u^2 - \frac{2u}{\cos\alpha} + 1 = 0;$$

d'ou

$$u = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \ (*),$$

(*) La seconde valeur de u, inverse de celle-ci, conduirait à une valeur négative de t_2, qui ne saurait convenir à la question.

et $$t_2 = \frac{b}{g} l.\text{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (13)$$

201. En ajoutant t_1 avec t_2, on aura le temps T qui s'est écoulé entre le départ et le retour du mobile; savoir :

$$T = \frac{b}{g}\left[\alpha + l.\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right]. \quad (14)$$

202. La vitesse v_2 que possède le mobile quand il vient frapper le sol, est donnée par la formule

$$v_2 = b\frac{e^{kt_2} - e^{-kt_2}}{e^{kt_2} + e^{-kt_2}}.$$

Or, $e^{kt_2} = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$; donc, après quelques réductions,

$$v_2 = b \sin\alpha. \quad (15)$$

D'ailleurs, la vitesse initiale, dans le mouvement ascendant, était

$$a = b \,\text{tang}\,\alpha;$$

donc $v_2 < a$. Ainsi, *la vitesse au retour est moindre que la vitesse au départ*. Par conséquent, *le mobile emploie moins de temps à s'élever qu'à redescendre*. C'est ce qu'on peut vérifier directement, au moyen des valeurs de t_1 et de t_2.

203. PROBLÈME V. — *Déterminer le mouvement rectiligne d'un point matériel m, repoussé par un centre fixe* O, *en raison inverse du carré de la distance.*

1°. Supposons que le mobile soit parti, sans vitesse initiale, d'un point A situé à la distance d du centre O. Soit b l'accélération en A. Quand le mobile sera parvenu à la distance x du centre, l'accélération aura pour valeur $b\frac{d^2}{x^2}$. Donc

$$x'' = b\frac{d^2}{x^2}. \quad (1)$$

On tire de là, comme dans le Problème I,

$$v = \sqrt{2bd\cdot\frac{x-d}{x}}, \quad (2)$$

ou $$x'\sqrt{\frac{x}{x-d}} = \sqrt{2bd}. \quad (3)$$

2°. Pour obtenir la *relation entre l'espace et le temps*, on peut remarquer que l'équation (2) donne

$$x = \frac{2bd^2}{2bd - v^2}, \quad (4)$$

puis

$$x' = 4bd^2 \frac{vv'}{(2bd - v^2)^2},$$

en sorte que l'équation (3) équivaut à

$$4b^2 d \frac{v'}{(2bd - v^2)^2} = 1\ (*). \quad (5)$$

La décomposition en fractions rationnelles (*Alg.*, 408) donne ensuite

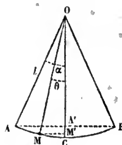
$$\frac{b}{2\sqrt{2bd}}\, l\, \frac{\sqrt{2bd} + v}{\sqrt{2bd} - v} + \frac{bv}{2bd - v^2} = t. \quad (6)$$

Cette équation permet de calculer *le temps en fonctions de la vitesse*.

3°. Remplaçant v par sa valeur (2), on trouve enfin

$$\sqrt{\frac{b}{2d}}\left[l\, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-d}}{\sqrt{d}} + \frac{\sqrt{x(x-d)}}{d} \right] = t\ (**). \quad (7)$$

204. Problème VI. — *Un pendule simple* OM, *de longueur* l, *part de la position* OA, *sans vitesse initiale. Quelles sont les circonstances de son mouvement?*



Le pendule ne sortira pas du plan vertical AOC mené par la position initiale OA. Le point matériel M se meut donc sur la circonférence ACB ayant pour centre le point de suspension O. Comme il est uniquement sollicité par son poids, sa vitesse, au bout du temps t, sera donnée par

(*) On est naturellement conduit à cette transformation, en essayant de rendre rationnel le premier membre de l'équation (3).

(**) Pour abréger, nous supprimons la discussion de ces diverses formules.

l'équation des forces vives (179):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

h représentant la *différence de niveau* entre les positions A, M.

205. Représentons par α, θ les angles AOC, MOC; nous aurons

$$h = A'M' = l(\cos\theta - \cos\alpha);$$

puis

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}. \quad (1)$$

D'après cette formule, la vitesse v augmente lorsque θ diminue : nulle pour $\theta = \alpha$, elle atteint son maximum lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire quand le pendule coïncide avec la verticale OC. A partir de cette époque, la vitesse diminue jusqu'à ce que le pendule atteigne la position OB, symétrique de OA; après quoi les mêmes phénomènes se reproduisent indéfiniment. Le pendule effectue donc une série d'oscillations ayant toutes, pour *amplitude,* l'angle AOB $= 2\alpha$. Ces oscillations sont *isochrones,* parce que *le mouvement de* B *vers* A *est le même,* au sens près, *que le mouvement de* A *vers* B (*).

206. L'arc AM $= s$ a pour expression $l(\alpha - \theta)$; donc

$$v = s' = -l\theta'.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (1) donne

$$-\frac{\theta'}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{2\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Le second membre est la dérivée de $t\sqrt{2\frac{g}{l}}$. Le premier membre est la dérivée d'une certaine fonction de θ. En la désignant par $F(\theta)$ (**), on a donc, pour la relation, entre l'angle θ et le temps t,

$$F(\theta) - F(\alpha) = t\sqrt{2\frac{g}{l}}. \quad (3)$$

(*) Si, comme on le suppose ici, il n'y avait ni résistance de l'air, ni frottement au point de suspension, etc., on réaliserait, au moyen du pendule, le *mouvement perpétuel.*

(**) La détermination de $F(\theta)$ dépend de la *théorie des fonctions elliptiques.*

207. Si l'angle α est très-petit, on peut supposer

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

et, à plus forte raison, $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

L'équation (2) deviendra donc

$$-\frac{\theta'}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4)$$

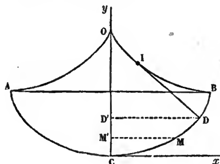
Le premier membre est la dérivée de arc $\cos\frac{\theta}{\alpha}$; en sorte que la relation (3) se réduit à cette formule très-simple :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \operatorname{arc}\cos\frac{\theta}{\alpha}. \quad (5)$$

208. Pour en conclure *le temps* T *d'une oscillation complète*, il suffit de supposer $\theta = \pi$; et l'on obtient la *formule de Galilée :*

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

209. Problème VII. — *Déterminer le mouvement d'un point matériel* M, *sur une cycloïde* ACB.



En rapportant la courbe à son *axe* CO et à sa tangente Cx, on trouve aisément (*D. D.*, 69):

$$x = R \operatorname{arc}\cos\frac{R-y}{R} + \sqrt{2Ry - y^2}, \quad (1)$$

d'où (*)

$$x' = y'\sqrt{\frac{2R-y}{y}}, \quad (2) \qquad s' = v = -y'\sqrt{\frac{2R}{y}}; \quad (3)\ (^{**})$$

Mais (204)

$$v = \sqrt{2g.\mathrm{M'D'}} = \sqrt{2g(y_0 - y)},$$

y_0 représentant l'ordonnée de la position initiale; donc

$$-\frac{y'}{\sqrt{(y_0-y)y}} = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (4)$$

En mettant le premier membre sous la forme

$$\frac{-y'}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}},$$

on obtient aisément

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{2y-y_0}{y_0}. \quad (5)$$

210. Cette formule générale donne, pour $y = 0$,

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ainsi, *le mobile* M *emploie, pour parvenir au point le plus bas de la cycloïde, un temps indépendant de sa position initiale.* On exprime cette propriété remarquable, en disant que la cycloïde est une courbe *tautochrone* (***).

211. *Remarques.* — I. La durée d'une oscillation quelconque

(*) On pourrait prendre pour point de départ la formule (2), qui exprime une propriété de la tangente.

(**) On prend le signe — devant le radical, parce que l'ordonnée y diminue quand le temps augmente.

(***) On démontre, dans les Traités de Mécanique rationnelle, que *la cycloïde est la seule courbe tautochrone plane.* De plus, cette courbe est *brachystochrone*, c'est-à-dire que le mobile emploie moins de temps à parcourir l'arc DC de cycloïde qu'à suivre toute autre courbe terminée aux points D, C.

sur la cycloïde est égale à la duré d'une oscillation très-petite sur le cercle osculateur au sommet C.

II. On peut démontrer que la *développée* d'une cycloïde ACB se compose des deux demi-cycloïdes AO, BO. Il résulte, de cette propriété, qu'un pendule simple OID, dont la longueur OC serait égale à $4R$, et qui s'enroulerait sur les courbes AO, BO, aurait des oscillations isochrones, indépendantes de leur amplitude. Cet appareil, que l'on voit dans quelques cabinets de physique, porte le nom de *pendule cycloïdal.*

212. Problème VIII. — *Déterminer le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, par une force proportionnelle à la distance* (*).

En prenant pour origine le centre fixe, et en supposant l'accélération totale représentée par la distance des deux points, on a, pour les équations du mouvement (179):

$$x'' = -x, \quad (1)$$
$$y'' = -y, \quad (2)$$
$$z'' = -z. \quad (3)$$

213. Si l'on multiplie par x' les deux membres de l'équation (1), et qu'on prenne les fonctions primitives, on trouve

$$x'^2 = k^2\cos^2\alpha + a^2 - x^2, \quad (4)$$

k étant la *vitesse initiale*, α l'angle qu'elle forme avec l'axe des x, et a la valeur initiale de x.

Les équations (2) et (3) donnent, semblablement,

$$y'^2 = k^2\cos^2\beta + b^2 - y^2, \quad (5)$$
$$z'^2 = k^2\cos^2\gamma + c^2 - z^2. \quad (6)$$

Par suite, la vitesse v, dont les composantes sont x', y', z', est donnée par l'équation

$$v^2 = k^2 + l^2 - r^2, \quad (7)\ (^{**})$$

(*) La solution de ce problème est tellement simple, que nous ne l'aurions pas donnée si elle n'offrait une vérification de quelques propriétés générales du mouvement d'un point matériel.

(**) Le principe des forces vives aurait donné, immédiatement, cette équation (7).

dans laquelle r représente la distance du mobile au centre d'attraction, et l la valeur initiale de cette distance. En d'autres termes,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad l^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

214. L'équation (4) équivaut à

$$\pm \frac{x'}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2 - x^2}} = 1.$$

Pour fixer les idées, prenons le radical avec le signe $+$; nous obtiendrons, en remontant aux fonctions primitives,

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} = t + \text{const.}$$

D'après l'une des hypothèses précédentes, $t = 0$ doit donner $x = a$; donc

$$t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} - \arcsin \frac{a}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}}. \quad (8)$$

215. Pour abréger, posons

$$\arcsin \frac{a}{\sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + a^2}} = \lambda,$$

ou

$$\tang \lambda = \frac{a}{k \cos \alpha}; \quad (9)$$

nous aurons, au lieu de l'équation (8),

$$x = a \frac{\sin(t + \lambda)}{\sin \lambda}; \quad (10)$$

puis, par un changement de lettres,

$$y = b \frac{\sin(t + \mu)}{\sin \mu}, \quad (11)$$

$$z = c \frac{\sin(t + \nu)}{\sin \nu}. \quad (12)$$

Les équations (4), (5), (6), (7), (10), (11), (12), résolvent complétement le problème (*). On peut d'ailleurs, pour plus de sim-

(*) Le lecteur remarquera que parmi les *onze* constantes contenues dans ces équations, *six* seulement *sont arbitraires*.

plicité, remplacer les trois premières par les formules

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sqrt{k^2\cos^2\alpha + a^2}\cos(t+\lambda),\\ y' &= \sqrt{k^2\cos^2\beta + b^2}\cos(t+\mu),\\ z' &= \sqrt{k^2\cos^2\gamma + c^2}\cos(t+\nu). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

216. *Surfaces de niveau.* — D'après la formule (7), la vitesse du mobile, à un instant quelconque, dépend uniquement de la vitesse initiale k, de la distance r au pôle attractif, et de la valeur initiale de cette distance. Par conséquent, si l'on imagine deux sphères, de rayons l, r, ayant pour centre commun le pôle, tous les mobiles partis de la première surface, avec une même vitesse, seront animés de vitesses égales, quand ils rencontreront la seconde sphère : celle-ci est donc une *surface de niveau* (181).

217. *Nature de la trajectoire.* — On peut reconnaître, soit par un raisonnement très-simple, soit par le calcul suivant, que *la trajectoire est située dans un plan passant par le pôle.*

Retranchons membre à membre les équations (1), (2), après avoir multiplié la première par y et la seconde par x; nous aurons,

$$yx'' - xy'' = 0.$$

Le binôme $yx'' - xy''$ est la dérivée de $yx' - xy'$; donc

$$yx' - xy' = h, \quad (14)$$

h étant une *constante* qui dépend de α, β, γ,....

Par une permutation tournante, nous déduirons, de l'équation (14),

$$zy' - yz' = f, \quad (15)$$
$$xz' - zx' = g. \quad (16)$$

Enfin, en éliminant x', y', z' entre ces trois dernières relations, nous trouvons

$$fx + gy + hz = 0, \quad (17)$$

équation d'un plan passant par l'origine (*).

(*) On reconnaît facilement, en mettant l'équation (14) sous la forme

$$(x^2+y^2)\left(\text{arc tang}\,\frac{x}{y}\right)' = h,$$

que *la projection du rayon vecteur décrit des aires proportionnelles aux*

218. Puisque la trajectoire est plane, nous pouvons la rapporter à deux axes rectangulaires situés dans son plan. De plus, nous pouvons faire passer l'axe des abscisses par la position initiale du mobile. Nous obtenons ainsi, au lieu des équations (10) et suivantes :

$$x = \frac{\sin(t+\lambda)}{\sin\lambda}, \quad (18) \qquad y = k\sin\alpha\sin t, \quad (19)$$

$$x' = \frac{\cos(t+\lambda)}{\sin\lambda}, \quad (20) \qquad y' = k\sin\alpha\cos t; \quad (21)$$

puis, en éliminant t entre (18) et (19) :

$$l^2y^2 + k^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = l^2k^2\sin^2\alpha. \quad (22)$$

Cette équation représente une ellipse qui a pour centre le pôle attractif. Le diamètre de cette courbe, dirigé suivant l'axe des abscisses, est évidemment égal à $2l$. De plus, on reconnaît aisément que le diamètre conjugué de celui-ci, *parallèle à la direction de la vitesse initiale* k, a pour valeur $2k$. Il est donc très-facile de construire la trajectoire, au moyen des *conditions initiales*.

219. *Remarques.* — I. Un point quelconque de la trajectoire peut être regardé comme la position initiale du mobile, pourvu que le temps soit compté à partir de l'époque correspondante. Par conséquent, *la vitesse du mobile est égale, à chaque instant, au demi-diamètre parallèle à la tangente suivant laquelle cette vitesse est dirigée.*

II. Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si la vitesse initiale est dirigée suivant le rayon vecteur, la trajectoire est rectiligne.

III. Si l'on suppose $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $k = l$, l'ellipse se réduit à un cercle, et *le mouvement devient uniforme.*

---

temps. Et comme la trajectoire est plane, *les aires décrites par le rayon vecteur* lui-même *sont* également *proportionnelles aux temps.* Cette propriété remarquable, qui subsiste toutes les fois que le mobile est attiré (ou repoussé) par un centre fixe, constitue le *principe des aires.*

CHAPITRE XIII.

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES ET DES FORCES PARALLÈLES.

De la constitution des solides.

220. L'étude des phénomènes physiques et chimiques conduit à regarder les corps comme des systèmes de points matériels ou d'atomes (1), dont les dimensions sont fort petites par rapport aux intervalles qui les séparent, bien que ces intervalles eux-mêmes aient une ténuité telle, qu'ils échappent à nos yeux aidés des plus puissants microscopes. Entre ces atomes *pesants,* sont répandus des atomes d'*éther,* incomparablement plus nombreux et plus petits que les premiers, et constituant de véritables *atmosphères* dans lesquelles ceux-ci sont plongés.

Les forces qui sollicitent ces deux espèces d'atomes sont : 1° l'*attraction* mutuelle des atomes pesants (*); 2° l'*attraction* de ces atomes pour l'éther (**); 3° la *répulsion* mutuelle des atomes d'éther. Quand il y a équilibre entre ces diverses forces, le corps est lui-même en équilibre : il ne change ni de figure ni de volume. Si la répulsion l'emporte sur l'attraction, le volume augmente : c'est ce qui arrive ordinairement quand on chauffe le corps, c'est-à-dire quand on y introduit de l'éther (***).

(*) On lui donne, en Chimie, le nom de *cohésion.*

(**) Cette hypothèse d'une attraction entre la matière pondérable et l'éther est attribuée à Laplace. Si elle est conforme à la réalité, l'éther, au lieu d'être répandu à peu près uniformément dans l'intérieur d'un corps, doit se *condenser* dans le voisinage des atomes pesants, de manière à former, autour d'eux, de petites atmosphères. Un corps quelconque devient alors comparable à un *système planétaire :* c'est un *microcosme.*

(***) La dilatation n'est pas une conséquence *nécessaire* de l'augmentation de température : *Erman* a fait voir qu'un alliage formé de *deux* parties de bismuth, *une* partie de plomb et *une* partie d'étain, s'allonge d'abord quand on le chauffe, puis *se raccourcit,* puis s'allonge de nouveau.

Indépendamment des hypothèses précédentes, les géomètres et les physiciens admettent encore que les *forces moléculaires* varient avec la distance des atomes; elles augmentent ou diminuent rapidement, suivant que cette distance diminue ou augmente : à distance sensible, l'attraction et la répulsion sont insensibles.

Dans les corps *solides*, ces diverses forces sont en équilibre, et même en *équilibre stable*, c'est-à-dire que si l'on applique au corps des *forces extérieures*, dont les intensités ne soient pas trop grandes, le corps résiste, jusqu'à un certain point, à la déformation que ces forces tendent à y produire, et reprend, à fort peu près, sa figure primitive, quand les actions extérieures ont cessé (*).

221. L'étude des changements d'état ou de figure déterminés dans un corps solide, par des forces données, constitue la *Mécanique moléculaire :* elle exige la connaissance et l'emploi des théories les plus élevées de l'Analyse infinitésimale. Dans la Mécanique élémentaire, on suppose toujours, pour plus de simplicité, que ces changements de figure sont insensibles, ce qui revient à regarder tout corps solide comme *un système de points matériels, invariablement liés entre eux.* Cette hypothèse conduit à des résultats d'autant plus approchés, que le corps considéré est plus résistant.

Forces concourantes.

222. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les forces données étaient appliquées en un même point. Ordinairement, les choses ne se passent pas ainsi : quand un corps solide est sollicité par différentes forces, celles-ci sont appliquées en différents points de sa surface (**). Néanmoins, si les directions de ces forces vont concourir en un même point situé dans l'intérieur du corps, les théorèmes ci-dessus (Chap. X et XI) subsistent encore. Cette conclusion résulte des propositions suivantes.

223. LEMME. — *Deux forces, égales et directement opposées,*

(*) Cette dernière propriété porte le nom d'*élasticité*.

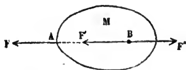
(**) Il ne s'agit ici, bien entendu, ni du poids du corps, ni des attractions ou répulsions qui s'exercent entre ses molécules.

appliquées en deux points d'un même corps solide, se font équilibre, en sorte que l'état du corps n'est pas altéré par l'introduction de ces forces.

Ce principe, réciproque de celui du n° 96, peut être regardé, soit comme un axiome, soit comme un résultat de l'expérience : il ne paraît pas susceptible d'une véritable démonstration. Relativement à la portée qu'on doit lui attribuer, nous ferons observer qu'il ne serait applicable, d'une manière absolue, qu'à des corps ayant une rigidité *infinie*. Mais si, comme nous venons de le dire, on suppose les forces considérées assez petites, relativement à la résistance du corps, pour que les changements de figure qu'il éprouve, sous leur action, soient insensibles, la proposition est d'accord avec les faits, et simplifie beaucoup certaines démonstrations.

224. Théorème I. — *On peut appliquer une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit invariablement lié au premier point d'application.*

Soit, pour fixer les idées, la force F appliquée en un point A appartenant à la surface du corps solide M; je dis que cette force peut être supposée appliquée au point B, situé dans l'intérieur du corps, sur le prolongement de FA.



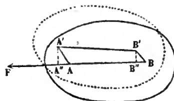
Pour le faire voir, imaginons, en B, deux forces égales à F, l'une F' dirigée suivant BA, l'autre F'' opposée à F' : ces deux forces auxiliaires, étant égales et directement opposées, se font équilibre (*). D'un autre côté, les forces F', F'' se font également équilibre : si nous les supprimons, ce qui ne changera en rien l'état du corps, il ne restera que la force F', appliquée en B. Cette dernière force peut donc tenir lieu de la force F, appliquée en A. C'est ce qu'il fallait démontrer.

225. Théorème II. — *Lorsqu'on transporte une force en un point quelconque de sa direction, son travail élémentaire ne change pas.*

Attribuons à la droite AB, qui joint les deux points d'applica-

(*) Cette proposition, assez évidente d'ailleurs, peut être regardée comme un cas particulier du lemme précédent.

tion, un déplacement très-petit, de manière à l'amener en A'B', et projetons les points A', B' sur AB, en A'', B''.



Quand la force F est appliquée en A, son travail élémentaire est F.AA''. De même, quand on la suppose transportée en B, son travail élémentaire est F.BB''. D'après l'énoncé, ces deux travaux doivent être égaux entre eux, du moins *quand les chemins* AA', BB' *seront suffisamment petits;* c'est-à-dire que *le rapport* $\frac{AA''}{BB''}$ *doit avoir pour limite l'unité* (*). Pour le démontrer, au moins dans un cas simple, faisons

$$AB = A'B' = l, \quad AA' = a, \quad BB' = b, \quad A'AA'' = \alpha, \quad B'BB'' = \beta,$$

et supposons que la figure ABB'A' soit plane; nous aurons, dans le trapèze A'B'A''B'',

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A''B''}^2 + (A'A'' - B'B'')^2,$$

ou $$l^2 = (l + a\cos\alpha - b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha - b\sin\beta)^2.$$

En effectuant et réduisant, on trouve

$$0 = 2l(a\cos\alpha - b\cos\beta) + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta).$$

Maintenant, si nous divisons tous les termes par $2lb\cos\beta$, nous aurons

$$0 = \frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} - 1 + \frac{1}{2l\cos\beta}\left[\frac{a}{b}\cdot a + b - 2a\cos(\alpha+\beta)\right];$$

et, en faisant décroître a et b jusqu'à zéro,

$$0 = \lim \frac{a\cos\alpha}{b\cos\beta} - 1,$$

ou $$\lim \frac{AA''}{BB''} = 1.$$

(*) La transformation que nous sommes obligé de faire subir à l'énoncé confirme la note du n° 160.

Composition des forces parallèles.

226. Théorème I. — *Deux forces* F, F′ *parallèles et de même sens, appliquées en deux points* A, B *d'un corps solide, ont une résultante* R *parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme. De plus, la direction de cette résultante partage la droite* AB *qui joint les points d'application des composantes, en deux segments additifs, inversement proportionnels à ces composantes.*

Sans changer l'état du corps, nous pouvons appliquer, aux points A, B, deux forces *f*, *f′*, égales et directement opposées (223). Soient AG, BH, les droites égales qui représentent ces forces auxiliaires, et AD, BE celles qui représentent les forces données.

Les forces F, *f*, appliquées en A, ont une résultante S représentée par AI. De même, les forces F′, *f′* se composent en une force S′, représentée par BK. Soit O le point de concours des directions IA, KB (*) : les forces S, S′ peuvent être supposées appliquées en ce point (**) (224). Cela étant, menons MON parallèle à AB, OC parallèle à AD, puis décomposons, suivant ces deux directions, chacune des *résultantes partielles* S, S′. Nous obtiendrons, comme tout à l'heure, les deux forces *f*, *f′*, égales et directement opposées, et les deux forces F, F′, dirigées cette fois suivant OC. Par conséquent, la première partie du théorème est démontrée.

Pour vérifier la seconde, il suffit d'observer que les triangles

(*) Ce point existe, parce que la somme des angles IAB, ABK est comprise entre 2^d et 4^d.

(**) En rendant suffisamment petites les forces *f*, *f′*, on peut rapprocher le point O, autant qu'on le voudra, de la droite AB. Par conséquent, il est permis de supposer que ce point appartient au corps solide; ce qui est nécessaire pour justifier l'application du lemme.

IAD, AOC, KBE, BOC sont semblables deux à deux. Donc

$$\frac{AD}{OC}=\frac{ID}{AC},\quad \frac{BE}{OC}=\frac{KE}{BC};$$

puis, à cause de ID = KE :

$$\frac{AD}{BE}=\frac{BC}{AC};$$

c'est-à-dire

$$\frac{F}{F'}=\frac{BC}{AC}.$$

227. Théorème II. — *Deux forces* F, F′ *parallèles, inégales et de sens contraires, appliquées en deux points* A, B *d'un corps solide, ont une résultante* R *parallèle à chacune d'elles, agissant dans le sens de la plus grande, et égale à leur différence. De plus, la direction de cette résultante partage la droite* AB *qui joint les points d'application des composantes, en deux segments soustractifs* AC, BC, *inversement proportionnels à ces composantes.*

Prenons, sur le prolongement de AB, et du côté de la plus grande des deux forces, le point C déterminé par la proportion

$$\frac{AC}{AB}=\frac{F'}{F},\quad (1)$$

ou, ce qui est équivalent, par la proportion

$$\frac{AC}{AB}=\frac{F'}{F-F'}.\quad (2)$$

Appliquons ensuite, en C, deux forces R, R′, directement opposées, parallèles aux deux forces F, F′ et égales à F — F′ : l'état du corps ne sera pas changé. Mais, d'après le théorème précédent, les deux forces F′, R′ ont une résultante égale et directement opposée à F : les trois forces F′, R′, F se font donc équilibre. Si nous les supprimons, il ne restera plus, au lieu des deux forces proposées, que la force unique R : celle-ci est donc la résultante.

228. *Remarque.* — Si les forces F, F′ devenaient égales, elles

n'auraient pas de résultante, puisque la relation (2) donnerait pour AC une valeur infinie. De plus, ces deux forces ne pourraient se faire équilibre (96). On a donné, à un pareil système de *deux forces égales, parallèles, de sens contraires et non directement opposées,* la dénomination de *couple.*

229. THÉORÈME III. — *Tant de forces parallèles que l'on voudra, appliquées en différents points d'un corps solide, et agissant dans le même sens, ont une résultante parallèle à leur direction commune, agissant dans le même sens, et égale à leur somme.*

Soient, pour fixer les idées, quatre forces F, F′, F″, F‴, appliquées en A, A′, A″, A‴. Les forces F, F′, parallèles et de même sens, ont une résultante r dont on obtiendra un point C en partageant la droite AA′ de manière que

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{F'}{F}.$$

De même, la résultante r' des forces r, F″, ou des forces F, F′, F″, rencontre la droite CA″ en un point C′ déterminé par la proportion

$$\frac{CC'}{A''C'} = \frac{F''}{r'}.$$

Enfin, la résultante R des forces r', F‴, c'est-à-dire la résultante des quatre forces proposées, passe en un point O qui divise C′A‴ en parties inversement proportionnelles à r' et F‴.

D'ailleurs,

$$r = F + F', \quad r' = r + F'', \quad R = r' + F''';$$

donc

$$R = F + F' + F'' + F'''.$$

230. *Remarques.* — I. Les points C, C′, C″, ... sont déterminés par les points d'application des forces F, F′, F″, ... et par les rapports de ces forces. Conséquemment, *si l'on fait tourner les forces* F, F′, F″, ... *autour de leurs points d'application, supposés fixes, de manière que ces forces conservent leur parallélisme et leurs rapports, les résultantes de tous ces systèmes de forces passeront constamment par un point fixe* O.

II. Ce point fixe est appelé le *centre des forces parallèles.*

III. Si toutes les forces F, F', F",... deviennent égales entre elles, leur centre ne diffère pas du *centre des moyennes distances* des points A, A', A",... (*).

IV. En même temps, les proportions ci-dessus deviennent

$$\frac{AC}{A'C} = 1, \quad \frac{CC'}{A''C'} = \frac{1}{2}, \quad \frac{C'O}{A'''O} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, le point C est le *milieu* de AA'; le point C' est situé au *tiers* de CA", à partir de C; le point O est situé au *quart* de C'A"', à partir de C', etc.

231. Au moyen des théorèmes précédents, on pourra toujours effectuer la composition d'un nombre quelconque de forces parallèles, agissant, les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé. En effet, on peut d'abord chercher la résultante R_1 des forces appartenant au premier groupe (229), et la résultante R_2 de celles qui appartiennent à l'autre groupe. Cela posé, trois cas principaux peuvent se présenter :

1°. Si les résultantes partielles R_1, R_2 sont *inégales*, elles se composent en une seule force R : *les forces proposées peuvent donc se réduire à une résultante unique.*

2°. Si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et directement opposées*, elles se détruisent : *les forces proposées peuvent donc se faire équilibre.*

3°. Enfin, si les résultantes R_1, R_2 sont *égales et non directement opposées*, elles constituent un couple : *les forces proposées peuvent donc se réduire à un couple.*

232. *Remarque.* — Dans le premier cas, *la résultante est égale à la somme algébrique des composantes.*

EXERCICES (**).

I. Une molécule est placée en un point duquel émane une force répulsive, proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance.

(*) *Voyez* l'ouvrage intitulé *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, troisième édition.

(**) Les énoncés suivants sont tirés du savant Recueil publié en 1855 par *M. Jullien*, sous le titre de *Problèmes de Mécanique rationnelle*. Paris, Mallet-Bachelier.

Déterminer la vitesse dont le mobile est animé lorsqu'il a parcouru un espace donné, et le temps qu'il a mis à parcourir cet espace.

II. Un point matériel est attiré, vers un centre fixe, par une force inversement proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance. Trouver quel doit être le nombre n pour que la vitesse que le mobile acquiert en venant d'une distance infinie à la distance a, soit égale à celle qu'il aurait acquise en venant de la distance a à la distance $\frac{a}{4}$.

Résultat : $$n = \frac{3}{2}.$$

III. Un point matériel est placé, en un lieu connu, sur la droite qui joint les centres de deux forces attractives égales, proportionnelles à la distance. Déterminer le mouvement du point.

IV. Un point matériel, qui se meut en ligne droite, est attiré ou repoussé, proportionnellement à la distance, par un pôle qui se meut suivant la même droite, avec une vitesse constante a. On connaît la vitesse initiale b du point attiré, ainsi que les positions initiales des deux mobiles. Quel est le mouvement du point attiré?

V. Un point matériel reçoit une vitesse a dans un milieu homogène, dont la résistance est proportionnelle à la racine carrée de la vitesse. Déterminer l'époque à laquelle le point s'arrêtera.

Résultat : $$T = \frac{2}{k}\sqrt{a},$$

k représentant la résistance pour l'unité de vitesse.

VI. Un point matériel, lancé avec une vitesse de 300 mètres par seconde, dans un milieu dont la résistance est constante, a perdu la moitié de sa vitesse en parcourant une longueur de 1 décimètre. Quel est le temps employé à parcourir cet espace?

Réponse : $\frac{1}{2250}$ de seconde.

VII. Un point matériel décrit une parabole autour d'un pôle attractif, situé à l'intersection de la directrice et de l'axe. Trouver

la force qui sollicite le mobile en un point quelconque de sa trajectoire.

Résultat : $$F = \frac{c^2}{p}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(p-x)^3}.$$

VIII. Déterminer le temps T qu'un projectile emploie à parcourir sa trajectoire parabolique (page 176), en fonction des vitesses v_0, v_1 aux extrémités de cet arc, de la vitesse v_2 au sommet de la parabole, et de l'angle θ que font entre elles les tangentes aux extrémités de l'arc.

Résultat : $$T = \frac{v_0 v_1}{v_2 g}\sin\theta.$$

IX. Un point matériel décrit une spirale logarithmique sous l'action d'une force constamment dirigée vers le pôle. Trouver l'expression de la force et la vitesse du mobile.

X. Un point matériel décrit une parabole sous l'influence d'un centre d'attraction placé au foyer de la courbe. Lorsque le mobile est à une distance donnée du foyer, la force attractive est subitement doublée. Quelle est la trajectoire que le mobile va décrire?

Réponse : Une ellipse tangente à la parabole.

XI. Un point matériel, soumis à l'attraction d'un centre fixe, se meut avec une vitesse inversement proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance au centre. Trouver la loi de l'attraction et l'équation de la trajectoire.

XII. Un point matériel décrit une lemniscate de Jacques Bernoulli (*), sous l'action d'une force dirigée vers le centre de la trajectoire. Déterminer la loi de la force, et le temps employé à décrire une boucle de la lemniscate.

Résultat : $$F = \frac{\mu}{u^7}, \quad T = \sqrt{\frac{3}{\mu}},$$

μ étant une constante.

(*) Cette courbe a pour équation $u^2 = \cos 2\omega$.

CHAPITRE XIV.

THÉORIE DES MOMENTS.

Définitions.

233. *Le moment d'une force, par rapport à un point, est le produit de l'intensité de la force, par la distance comprise entre le point et la direction de la force.*

Le point donné est appelé *centre des moments.*

De même, *le moment d'une force, par rapport à un plan parallèle à sa direction, est le produit de l'intensité de la force, par la distance comprise entre le plan et la direction de la force* (*).

Enfin, *le moment d'une force, par rapport à un axe, est le produit de la projection de la force, sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la plus courte distance entre l'axe et la direction de la force.*

Forces concourantes.

234. Théorème I. — *Le moment de la résultante* R *de deux forces* F, F', *par rapport à un point* O *situé dans leur plan, est égal à la somme des moments des composantes.* (Théorème de Varignon.)

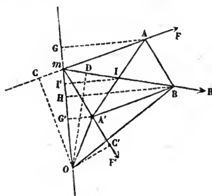
L'égalité $$Rr = Fp + F'p', \quad (1)$$
ou $$mB.OD = mA.OC + mA'.OC',$$

exprime que le triangle OmB est équivalent à la somme des triangles OmA, OmA'. Or, ces trois triangles ont même base Om; donc ils sont entre eux comme leurs hauteurs BH, AG, A'G'; donc

(*) La plupart des auteurs ne supposent pas la force parallèle au plan, et appellent *moment le produit de l'intensité de la force par la distance de son point d'application au plan.* Nous n'avons pas cru devoir adopter cette définition, parce que (au moins dans le cas d'un corps solide) tout point de la droite suivant laquelle agit la force pouvant être regardé comme le point d'application de celle-ci, le produit désigné par le mot *moment* deviendrait complétement indéterminé.

l'égalité (1) équivaut à celle-ci :

$$BH = AG + A'G'.$$



Mais, I étant le centre du parallélogramme, $BH = 2\,II'$; et, d'après un théorème connu,

$$II' = \frac{1}{2}(AG + A'G');$$

donc enfin

$$BH = AG + A'G'.$$

235. *Remarque.* — Si le centre O tombait dans l'angle formé par les directions mA, mA', ou dans l'angle formé par les prolongements de ces droites, le triangle OmB serait équivalent à la *différence* des triangles OmA, OmA', en sorte que le moment de la résultante serait égal à la *différence* des moments des composantes. Pour n'avoir pas à modifier l'énoncé du théorème, on regarde le moment d'une force comme *positif* ou comme *négatif*, suivant que cette force *tend à faire tourner la droite* Om *dans un sens ou dans l'autre, autour du centre des moments.*

236. Théorème II. — *Le moment de la résultante* R *de plusieurs forces concourantes* $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ *situées dans un même plan, par rapport à un point* O *situé dans ce plan, est égal à la somme des moments des composantes.*

Appelons R_1 la résultante des forces F_1, F_2; R_2 la résultante des forces F_3, R_1; et ainsi de suite. Nous aurons, d'après le premier théorème :

$$\mathfrak{M}R_1 = \mathfrak{M}F_1 + \mathfrak{M}F_2,$$
$$\mathfrak{M}R_2 = \mathfrak{M}F_3 + \mathfrak{M}R_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{M}R_{n-2} = \mathfrak{M}F_{n-1} + \mathfrak{M}R_{n-3},$$
$$\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}F_n + \mathfrak{M}R_{n-2};$$

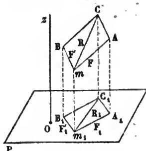
d'où

$$\mathfrak{M}R = \mathfrak{M}F_1 + \mathfrak{M}F_2 + \ldots + \mathfrak{M}F_n,$$

ou, pour abréger,

$$\mathfrak{M}R = \Sigma\,\mathfrak{M}F.$$

237. Théorème III. — *Le moment de la résultante* R *de deux forces* F, F', *par rapport à un axe* O*z*, *est égal à la somme des moments des composantes.*



La projection du parallélogramme mACB, sur un plan P perpendiculaire à Oz, est évidemment un parallélogramme $m_1 A_1 C_1 B_1$. D'un autre côté, *les plus courtes distances des droites* mA, mB, mC, *à l'axe* Oz, *se projettent, sur le plan* P, *suivant les distances du point* O aux droites $m_1 A_1$, $m_1 B_1$, $m_1 C_1$ (*). Conséquemment, la proposition qu'il s'agit de démontrer se réduit à la relation

$$\mathfrak{M} R_1 = \mathfrak{M} F_1 + \mathfrak{M} F'_1,$$

laquelle rentre dans le Théorème I.

238. Théorème IV. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces concourantes, par rapport à un axe, est égal à la somme des moments des composantes.*

La démonstration est la même que celle du Théorème II.

239. *Remarque.* — Soit γ l'angle formé par la direction d'une force F avec un axe Oz; soit δ la plus courte distance entre la direction de la force et l'axe. On a

$$\mathfrak{M} F = \mathfrak{M} F_1 = F_1 \delta.$$

Mais $$F_1 = F \cos(F, P) = F \sin\gamma;$$

donc $$\mathfrak{M} F = F \delta \sin\gamma.$$

Ainsi, *le moment d'une force, par rapport à un axe, est égal au produit de la force par sa plus courte distance à l'axe et par le sinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe* (**).

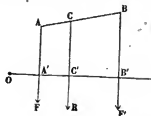
Forces parallèles.

240. Théorème V. — *Le moment de la résultante de plusieurs forces parallèles situées dans un plan, par rapport à un point* O

(*) *Traité élémentaire de Géométrie descriptive.*

(**) Ce résultat pourrait être pris pour définition.

situé dans ce plan, est égal à la somme des moments des composantes.



Il suffit évidemment de considérer le cas de deux composantes F, F (236). Or,

$$\frac{F}{F'} = \frac{B'C'}{A'C'},$$

ou

$$\frac{F}{F'} = \frac{p'-r}{r-p},$$

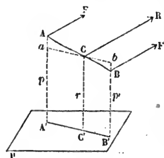
r, r', p désignant les distances OA', OB', OC'.

Par suite, $$(F+F')r = Fp + F'p',$$

ou enfin $$Rr = Fp + F'p'.$$

241. *Remarque.* — Pour que l'énoncé subsiste généralement, on doit affecter de signes convenables les forces et les distances (235). La même remarque est applicable aux propositions suivantes.

242. Théorème VI. — *Le moment de la résultante* R *de plusieurs forces parallèles, par rapport à un plan* P, *est égal à la somme des moments des composantes.*



Considérons, comme dans le Théorème V, deux forces F, F' et leur résultante R : nous pouvons les supposer appliquées en trois points A, B, C situés sur une même droite. Soient A', B', C' les projections orthogonales de ces points, sur le plan P. En menant acb parallèle à A'C'B', nous aurons

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{AC}{BC} = \frac{F'}{F},$$

ou $$\frac{p-r}{r-p'} = \frac{F'}{F};$$

et enfin (240) $$Rr = Fp + F'p'.$$

243. Théorème VII. — *Le moment de la résultante de plusieurs*

forces parallèles, par rapport à un axe, est égal à la somme des moments des composantes.

La démonstration est tout à fait semblable à celle du Théorème III.

Composition et équilibre de forces parallèles.

244. L'avant-dernier théorème donne le moyen de déterminer, en grandeur et en situation, la résultante R d'un nombre quelconque de forces parallèles $F_1, F_2, \ldots, F_n$. En effet, si l'on représente par a, b les distances de cette résultante à deux plans qui se coupent suivant une parallèle à toutes les forces données; par x_1, y_1, x_2, $y_2, \ldots$, les quantités analogues pour les forces $F_1, F_2, \ldots$, on aura

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n,$$
$$Ra = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_n x_n,$$
$$Rb = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \ldots + F_n y_n;$$

ou, pour abréger,

$$R = \Sigma F, \quad Ra = \Sigma F x, \quad Rb = \Sigma F y.$$

Ces équations donnent (si ΣF n'est pas nulle) :

$$a = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}, \quad b = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F}.$$

245. *Remarque.* — Lorsque toutes les forces F sont égales et qu'elles agissent dans le même sens,

$$R = nF, \quad a = \frac{1}{n}\Sigma x, \quad b = \frac{1}{n}\Sigma y.$$

246. *Discussion.* — Nous savons (231) que la composition des forces parallèles présente trois cas principaux : les forces proposées peuvent avoir une *résultante unique*, ou bien elles peuvent se faire *équilibre*, ou enfin elles peuvent se réduire à *un couple*.

1°. Dans le premier cas, les deux résultantes partielles R_1, R_2 sont inégales. Donc la somme *algébrique* de toutes les forces données est différente de zéro, ou

$$\Sigma F \gtrless 0. \quad (1)$$

2°. Quand il y a équilibre, les deux résultantes partielles R_1, R_2 sont égales et directement opposées. La première condition est évidemment exprimée par l'équation $\Sigma F = 0$. Pour interpréter la seconde, appliquons le théorème des moments. En désignant, pour un instant, par $F_1, F_2, F_3, \ldots$, les forces qui agissent dans un sens, et par $F'_1, F'_2, F'_3, \ldots$, celles qui agissent en sens contraire :

$$\begin{aligned} R_1 a_1 &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \ldots, \\ R_1 b_1 &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \ldots, \\ R_2 a_2 &= F'_1 x'_1 + F'_2 x'_2 + F'_3 x'_3 + \ldots, \\ R_2 b_2 &= F'_1 y'_1 + F'_2 y'_2 + F'_3 y'_3 + \ldots; \end{aligned}$$

d'où, à cause de $R_1 = R_2$, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots - F'_1 x'_1 - F'_2 x'_2 - \ldots \\ 0 &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + \ldots - F'_1 y'_1 - F'_2 y'_1 - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ainsi : 1° *la somme algébrique des forces est nulle;* 2° *les sommes algébriques des moments des forces, par rapport à deux plans parallèles à leur direction, sont séparément nulles.* Les *équations de l'équilibre* sont donc

$$\Sigma F = 0, \quad \Sigma F x = 0, \quad \Sigma F y = 0. \quad (2)$$

3°. Lorsque le système se réduit à un couple, $R_1 = R_2$, mais *l'on n'a pas, à la fois*, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$; de sorte qu'une des égalités (A), au moins, est remplacée par une inégalité. Dans ce cas : 1° *la somme algébrique des forces est nulle;* 2° *si l'on fait la somme des moments des forces, par rapport à deux plans parallèles à leur direction commune, une de ces sommes, au moins, est différente de zéro.*

247. Remarque. — *Si la somme des moments est nulle, le plan des moments contient les résultantes partielles* R_1, R_2, *ou il est parallèle au plan qui les contient.*

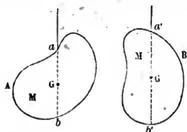
CHAPITRE XV.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Préliminaires.

248. Nous avons vu que, pour tout système de forces parallèles, il existe un *centre* par lequel passe constamment la résultante, lorsque les composantes tournent autour de leurs points d'application (230). Par conséquent, si l'on considère un corps quelconque comme un assemblage de points matériels ou molécules, et si l'on fait attention que les poids de ces molécules sont des forces sensiblement parallèles, on conclura qu'il existe un point unique par lequel passe constamment la direction du poids, quand on tourne le corps dans diverses positions à l'égard de l'horizon. Ce point est le *centre de gravité* du corps.

249. *Remarque.* — Quand le centre de gravité est situé à l'intérieur du corps, on peut supposer le poids de celui-ci appliqué en ce centre; de sorte que, dans ce cas, *le centre de gravité est le point d'application du poids du corps.* C'est cette propriété que nous avions adoptée provisoirement comme définition (119).



250. Pour obtenir, expérimentalement, la position du centre de gravité G d'un corps solide M, il suffit de suspendre le corps, au moyen d'un fil, successivement dans deux situations différentes A, B. Si l'on prolonge, par la pensée, les directions ab, $a'b'$ du fil, elles se rencontreront au centre de gravité cherché.

En effet, dans chacune des positions d'équilibre du corps, la direction du fil passe par le centre de gravité.

Détermination des centres de gravité.

251. Problème I. — *Déterminer le centre de gravité d'un système de corps, connaissant le centre de gravité et le poids de chacun d'eux.*

Pour que le système soit invariable de figure, il faut que l'on suppose les corps liés les uns aux autres par des tiges rigides; de plus, ces tiges doivent être *sans pesanteur,* c'est-à-dire que l'on néglige leurs poids. Cela posé, si l'on prend d'abord les moments par rapport à deux plans verticaux, perpendiculaires pour plus de simplicité, on aura (244)

$$P = \Sigma p, \quad Pa = \Sigma px, \quad Pb = \Sigma py,$$

p désignant le poids d'un quelconque des corps donnés.

Prenant ensuite les moments par rapport à un plan horizontal arbitraire, on aura pareillement

$$Pc = \Sigma Pz \text{ (*)}.$$

Les coordonnées rectangulaires du centre de gravité cherché seront donc

$$a = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \quad b = \frac{\Sigma py}{\Sigma p}, \quad c = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p}.$$

252. Problème II. — *Déterminer le centre de gravité d'un corps de forme donnée, connaissant la loi de la densité en chacun de ses points.*

Pour essayer de résoudre cette question, on suppose le corps décomposé en *éléments* très-petits, par exemple en parallélipipèdes rectangles ayant leurs faces respectivement parallèles à trois plans coordonnés : les arêtes de l'élément dont un sommet a pour coordonnées x, y, z seront $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Soit

$$d = \varphi(x, y, z)$$

(*) Il est nécessaire d'employer cette dernière équation, parce que le centre de gravité d'un corps, au lieu d'être un point quelconque de la direction de son poids, est un point *unique* de cette ligne. D'ailleurs, comme la direction de la pesanteur est invariable, on peut supposer que l'on a fait tourner, à la fois, tous les corps composant le système donné, de manière à rendre *horizontale* l'intersection des deux plans par rapport auxquels on avait d'abord pris les moments.

la densité au point considéré, c'est-à-dire *la limite vers laquelle tend le rapport entre le poids p et le volume* $\Delta x \Delta y \Delta z$ *de l'élément* (*). Les coordonnées du centre de gravité de celui-ci sont comprises entre x, y, z et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. De plus, le poids de cet élément peut être supposé compris entre

$$\Delta x \Delta y \Delta z \varphi \quad \text{et} \quad \Delta x \Delta y \Delta z (\varphi + \Delta \varphi).$$

On conclut facilement de là que le poids du corps est

$$P = \lim \Sigma (\Delta x \Delta y \Delta z \varphi),$$

et que les coordonnées de son centre de gravité sont données par les formules

$$a = \frac{\lim \Sigma (x \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P},$$

$$b = \frac{\lim \Sigma (y \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P},$$

$$c = \frac{\lim \Sigma (z \Delta x \Delta y \Delta z \varphi)}{P}.$$

253. Quand le corps est homogène, φ est une constante, et l'on a simplement

$$a = \frac{\lim \Sigma (x \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

$$b = \frac{\lim \Sigma (y \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

$$c = \frac{\lim \Sigma (z \Delta x \Delta y \Delta z)}{V},$$

V représentant le volume, c'est-à-dire $\lim \Sigma (\Delta x \Delta y \Delta z)$ (**).

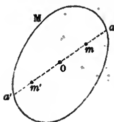
254. Avant d'appliquer les formules précédentes à quelques exemples simples, nous établirons divers théorèmes qui permettent, dans certains cas, de résoudre, sans aucun calcul, les problèmes relatifs aux centres de gravité.

(*) Cette définition, qui suppose la continuité de la matière, conduit cependant à des résultats suffisamment exacts, du moins quand le corps n'a pas de pores appréciables.

(**) La recherche de ces diverses limites constitue un problème de Calcul intégral.

256. **Théorème I.** — *Si un corps homogène* **M** *a un centre de figure* O, *ce point est le centre de gravité du corps.*

A chaque molécule ou point matériel m correspond, sur la corde aOa' passant en ce point, une autre molécule m', symétrique de la première, relativement au centre O. Si donc, comme nous l'avons supposé, les deux molécules ont des poids égaux, leur centre de gravité sera le point O. Les poids de toutes les molécules du corps, prises deux à deux, sont donc appliqués en ce point, lequel, conséquemment, est le centre de gravité du corps.



257. **Théorème II.** — *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont dans un plan, le centre de gravité du système est dans ce même plan.*

En effet, d'après le théorème sur la composition d'un système de forces parallèles (229), il s'ensuit que si les points d'application de ces forces sont dans un même plan, le point d'application de la résultante est également dans ce plan.

258. **Corollaire.** — *Si les centres de gravité de plusieurs corps sont sur une droite, le centre de gravité du système est sur cette droite.*

259. **Théorème III.** — *Si un corps homogène renferme un plan diamétral, le centre de gravité du corps est dans ce plan.*

Soit XY un *plan diamétral* du corps, c'est-à-dire *un plan qui divise en deux parties égales toutes les cordes ab, a'b', a"b",..., terminées à la surface et parallèles à une même direction* (*T. D.*, 75). A chaque molécule ou point matériel m correspondra, sur la corde ab passant en ce point, une autre molécule m' symétrique de la première, par rapport au milieu c de ab. Le centre de gravité du système (m, m') est donc en c (256). Par suite, le centre de gravité de la *file ab* de molécules sera également en c, c'est-à-dire dans le plan XY : ce plan contient donc le centre de gravité du corps (257).

260. **Corollaire.** — *Si un corps homogène renferme un plan de symétrie, son centre de gravité est dans ce plan.*

261. Les conséquences des théorèmes précédents sont fort nombreuses; nous en citerons quelques-unes :

1°. *Sphère, parallélipipède, cylindre droit ou oblique.* — Dans chacun de ces corps, le centre de gravité coïncide avec le centre de figure.

2°. *Cercle, parallélogramme, polygone régulier, ligne droite* (*). — Le *centre* de chacune de ces figures est également le centre de gravité de la figure.

3°. *Triangle.* — *Le centre de gravité d'un triangle est le point de rencontre des trois médianes* (259).

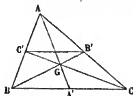
4°. *Prisme triangulaire.* — *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est situé au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases* (259).

Etc.

262. *Remarques.* — I. La notion du centre de gravité suffit, indépendamment de toute autre théorie, pour établir le théorème relatif au *point de concours des médianes* d'un triangle. En effet, le centre de gravité du triangle devant se trouver sur chacune de ces trois droites, elles concourent nécessairement en un même point.

De même, la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre est, comme on le reconnaît aisément, l'intersection de deux plans diamétraux de ce corps; donc elle contient le centre de gravité cherché; donc, *dans tout tétraèdre, les trois droites que l'on obtient en joignant les milieux de deux arêtes opposées concourent en un même point, centre de gravité du tétraèdre.*

II. *Le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *est situé au tiers de chaque médiane, à partir de la base correspondante.*



En effet, les deux triangles BGC, B'GC', évidemment semblables, donnent

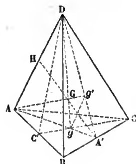
$$\frac{BG'}{BG} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

III. *Le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *coïncide avec le*

(*) Ce qu'on appelle un *cercle pesant* est un cylindre excessivement mince; de même, un *parallélogramme pesant* est un parallélipipède dont la hauteur est sensiblement nulle, etc.

centre de gravité du système de trois poids égaux, ayant pour centres de gravité les sommets A, B, C.

IV. *Le centre de gravité* G *d'un tétraèdre* ABCD *est situé sur la droite* Dg *menée d'un sommet quelconque* D *au centre de gravité* g *de la base; il est au quart de cette ligne, à partir de la base.*



En effet : 1° les deux *plans diamétraux* AA'D, CC'D contiennent le centre de gravité du tétraèdre; donc ce centre est situé sur leur intersection Dg.

2°. Soit g' le centre de gravité de la face BCD. On aura

$$\frac{Gg}{GD} = \frac{gg'}{AD} = \frac{gA'}{AA'} = \frac{1}{3};$$

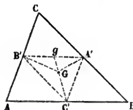
etc.

V. *Le centre de gravité* G *d'un tétraèdre* ABCD *coïncide avec le centre de gravité du système de quatre poids égaux, ayant pour centres de gravité les sommets* A, B, C, D.

VI. Par conséquent, *ce centre est situé au milieu de la droite* A'H *qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques* (*).

Problèmes sur les centres de gravité.

263. Problème I. — *Trouver le centre de gravité du périmètre d'un triangle,* c'est-à-dire *trouver le centre de gravité du système de trois tiges homogènes* AB, BC, CA, *dont l'épaisseur est négligeable par rapport à la longueur.*



Les centres de gravité des trois côtés sont en leurs milieux A', B', C'. Par conséquent, la question se réduit encore à *déterminer le centre de gravité du système de trois poids, proportionnels aux longueurs* BC, CA, AB, *et appliqués en* A', B', C'.

Le centre de gravité g du système des deux premiers poids par-

(*) On démontre directement cette dernière propriété en faisant attention que $A'G = \frac{1}{3}A'H + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}A'H = \frac{1}{2}A'H$.

tage la droite A′B′ en deux segments $A'g$, $B'g$ inversement proportionnels à BC, CA; en sorte que l'on a

$$\frac{A'g}{B'g}=\frac{AC}{BC},$$

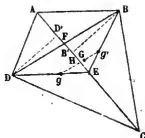
ou, à cause de $A'C'=\frac{1}{2}AC,\quad B'C'=\frac{1}{2}BC$:

$$\frac{A'g}{B'g}=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

Cette dernière proportion prouve que $C'g$ *est la bissectrice de l'angle* A′C′B′. Donc *le centre de gravité cherché coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle donné* (*).

264. Problème II. — *Trouver le centre de gravité d'un quadrilatère* ABCD.

La diagonale AC partage le quadrilatère en deux triangles dont les centres de gravité g, g' sont situés sur les médianes DE, BE. Conséquemment, le centre de gravité cherché divise la droite gg' en deux segments gG, $g'G$ inversement proportionnels aux *poids* ou aux *aires* de ces triangles. On a donc



$$\frac{gG}{g'G}=\frac{ABC}{ADC}.$$

Mais les triangles ABC, ADC ont même base; donc ils sont entre eux comme leurs hauteurs BB′, DD′; ou encore comme les segments BF, DF de la diagonale BD; ou enfin comme les segments $g'H$, gH de la droite gg'. Donc

$$\frac{gG}{g'G}=\frac{g'H}{gH}.$$

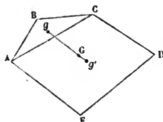
(*) Les segments gG, GC′ sont entre eux comme AB et AC + BC, ou comme A′B′ et A′C′ + B′C′. Par conséquent: *le cercle inscrit à un triangle partage chaque médiane en deux segments proportionnels au côté opposé et à la somme des côtés adjacents.* Cet exemple, et ceux du n° 262 suffisent pour faire comprendre que la théorie des centres de gravité peut être avantageusement appliquée à la Géométrie.

Cette proportion donne, évidemment, $gG = g'H$, $g'G = gH$. Ainsi, *pour obtenir le centre de gravité* G *du quadrilatère* ABCD, *menez la diagonale* AC, *construisez les centres de gravité* g, g' *des deux triangles* ADC, ABC, *et prenez, sur la droite* gg', $gG = g'H$.

265. *Remarque.* — Le point G est situé sur la droite qui joint les centres de gravité des triangles ABD, BCD.

266. Problème III. — *Déterminer le centre de gravité d'un polygone quelconque.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un pentagone ABCDE.



Menons la diagonale AC, de manière à décomposer le pentagone en un triangle ABC et en un quadrilatère ACDE. Soient g, g' les centres de gravité de ces deux figures, déterminés par les constructions indiquées ci-dessus : la droite gg' contiendra le centre de gravité cherché G.

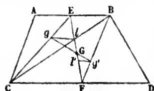
Une autre décomposition du pentagone donnera une seconde droite sur laquelle se trouve le centre G; donc ce point sera déterminé.

Si le polygone donné est un hexagone, on le décomposera en triangles et en pentagones, ou bien en quadrilatères; et ainsi de suite.

267. *Remarque.* — Chaque décomposition donne une droite qui contient le centre de gravité du polygone donné; donc *ce centre est le point de concours d'un réseau de droites.*

268. Problème IV. — *Trouver le centre de gravité* G *d'un trapèze* ABCD.

En opérant comme dans le cas d'un quadrilatère quelconque (264), on obtient une première droite gg', sur laquelle est situé le point cherché G. D'un autre côté, la médiane EF, divisant en deux parties égales toutes les cordes parallèles aux bases du trapèze, contient aussi le centre G. Ce point est donc déterminé.



269. *Remarque.* — On peut se dispenser de construire les points g, g'.

En effet, soient gl, $g'l'$ des parallèles aux bases, menées par ces deux points; on aura

$$\frac{lG}{l'G} = \frac{gG}{g'G} = \frac{BCD}{ABC};$$

ou, en appelant B, b les bases CD, AB,

$$\frac{lG}{l'G} = \frac{B}{b}.$$

Cette proportion donne

$$lG = ll' \frac{B}{B+b} = \frac{1}{3} EF \frac{B}{B+b},$$

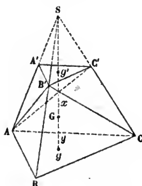
$$l'G = ll' \frac{b}{B+b} = \frac{1}{3} EF \frac{b}{B+b}.$$

Par suite, x et y désignant les segments EG, FG de la médiane,

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{B}{B+b}+1}{\frac{b}{B+b}+1} = \frac{2B+b}{2b+B}.$$

Ainsi, *le centre de gravité du trapèze partage la médiane* EF *en deux segments* EG, FG *qui sont entre eux comme la première base* AB, *augmentée du double de la seconde* CD, *est à la seconde augmentée du double de la première.*

270. Problème V. — *Déterminer le centre de gravité* G *d'un tronc de tétraèdre, à bases parallèles.*



Les centres g, g' des bases ABC, A'B'C', et le sommet S du tétraèdre, sont évidemment situés sur une même droite; donc le point cherché G appartient à cette droite : pour le déterminer complétement, il suffit d'évaluer le rapport des segments g'G, gG.

A cet effet, décomposons le tronc en trois tétraèdres ABCB', A'B'C'A, ACB'C', et prenons les moments par rapport aux deux bases; nous aurons, en employant les mêmes notations que

dans le problème précédent,

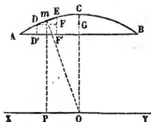
$$\frac{x}{y}=\frac{B.\frac{3}{4}h+b.\frac{1}{4}h+\sqrt{Bb}.\frac{1}{2}h}{B.\frac{1}{4}h+b.\frac{3}{4}h+\sqrt{Bb}.\frac{1}{2}h}\ (^*),$$

ou

$$\frac{x}{y}=\frac{3B+b+2\sqrt{Bb}}{B+3b+2\sqrt{Bb}}.$$

271. Problème VI. — *Déterminer le centre de gravité* G *d'un arc de cercle* ACB.

Commençons par chercher le centre de gravité d'une ligne brisée régulière, d'un nombre pair de côtés, inscrite dans ACB. Ce point étant nécessairement situé sur le rayon OC passant par le milieu de l'arc, il suffit d'évaluer sa distance x au centre O. Soit DE un côté quelconque de la ligne brisée. Soit m le milieu de ce côté. En prenant les moments par rapport à un axe XY parallèle à AB, nous aurons



$$\Sigma\, DE.mP = x\,\Sigma\, DE,$$

ou

$$\Sigma\, DE.mP = Px,$$

P étant le périmètre du polygone.

Afin de simplifier la *sommation* indiquée dans le premier membre, transformons DE.mP. Nous aurons, en menant Om, puis DF et EF parallèle et perpendiculaire à XY :

$$\frac{DE}{Om}=\frac{DF}{mP};$$

(*) Les segments x, y sont entre eux comme les distances du point G aux deux plans A′B′C′, ABC; donc $\frac{x}{y}$ représente le rapport des moments du tronc, par rapport à ces plans. De plus, les volumes des trois tétraèdres sont, comme on sait, $B\cdot\frac{1}{3}h$, $b\cdot\frac{1}{3}h$, $\sqrt{Bb}\cdot\frac{1}{3}h$. Enfin, les distances des centres de gravité de ces trois corps, à la base ABC, ont pour valeurs $\frac{1}{4}h$, $\frac{3}{4}h$ et $\frac{1}{2}h$.

donc $$\mathrm{DE}.m\mathrm{P} = \mathrm{O}m.\mathrm{DF} = \mathrm{R}.\mathrm{D'F'} \ (*),$$

et, conséquemment,

$$x = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} \Sigma \mathrm{D'F'} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} \mathrm{AB} :$$

la distance x est une quatrième proportionnelle au périmètre P, *à la corde* AB *et au rayon* R. Par suite, *la distance du centre* O *d'un arc de cercle, à son centre de gravité* G, *est une quatrième proportionnelle à l'arc, à la corde et au rayon.*

272. Problème VII. — *Trouver le centre de gravité* G *d'un secteur circulaire* ACBO.

Inscrivons, à cette figure, un *secteur polygonal régulier.* Soit ODE un des triangles isocèles égaux composant ce nouveau secteur. Le centre de gravité m' de ce triangle est situé aux deux tiers de l'apothème Om et au milieu de la petite corde D'E', homologue à DE. Conséquemment, le centre de gravité du secteur polygonal coïncide avec le centre de gravité d'une ligne brisée régulière, inscrite dans l'arc A'C'B' qui a pour rayon $\frac{2}{3}$OA. Les deux lignes brisées ont pour limites respectives les deux arcs; donc *le centre de gravité d'un secteur circulaire coïncide avec le centre de gravité d'un arc semblable à celui qui sert de base au secteur, et dont le rayon est les deux tiers du rayon du secteur.*

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Le centre de gravité d'une zone sphérique est situé au milieu de la hauteur.

II. *Théorème.* — Le centre de gravité d'un secteur sphérique coïncide avec le centre de gravité d'une zone semblable à celle qui sert de base au secteur, et dont le rayon est les trois quarts du rayon du secteur.

(*) Cette transformation, que l'on emploie pour déterminer l'aire de la sphère, est attribuée à Archimède.

III. *Théorème.* — Le centre de gravité d'un segment sphérique à une base partage la hauteur h en deux parties qui sont entre elles comme $8R - 3h$ et $4R - h$, R étant le rayon de la sphère.

IV. Trouver le centre de gravité de la surface d'un cône droit.

V. Trouver le centre de gravité d'un triangle dans lequel la densité, en un point quelconque, est proportionnelle à la distance comprise entre ce point et la base du triangle.

VI. Aux sommets d'un triangle rigide sont appliquées trois forces parallèles, proportionnelles aux côtés opposés. Déterminer le centre de ces forces.

VII. Aux sommets B, C, D d'un tétraèdre ABCD sont appliquées trois forces parallèles. Déterminer la distance de leur centre au sommet A.

VIII. *Théorème.* — Les centres de gravité de l'aire et du contour d'un polygone circonscrit à une circonférence sont situés sur un rayon; leurs distances au centre de la circonférence sont dans le rapport de 2 à 3. (Brassine.)

IX. *Théorème.* — Le centre de gravité du volume et de l'aire d'un polygone circonscrit à une sphère sont situés sur un rayon; leurs distances au centre de la sphère sont dans le rapport de 3 à 4. (Brassine.)

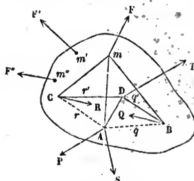
X. *Théorème.* — Étant donnés dans l'espace n points 1, 2, 3, ..., n, on les joint deux à deux dans l'ordre des numéros, de manière à former un polygone *ouvert*, plan ou gauche. Sur chaque côté ou sur son prolongement on prend un point, que l'on désigne par l'ensemble des numéros des points par où passe la droite sur laquelle il est pris : joignant ces points aux premiers, on forme une deuxième série de droites. Celles de ces droites qui passent par les points dont les indices réunis contiennent les trois mêmes numéros, se rencontrent en de nouveaux points, dont chacun peut être désigné par *trois* numéros. Joignant ces points aux précédents, on forme une troisième série de droites. Celles de ces droites qui passent par des points dont les indices réunis contiennent les quatre ou les cinq mêmes numéros, se rencontrent en de nouveaux points; etc. (Coriolis.)

CHAPITRE XVI.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE FORCES QUELCONQUES.

273. Théorème I. — *Tant de forces que l'on voudra*, F, F', F'',..., *appliquées à un corps solide* M, *peuvent toujours se réduire à deux forces* S, T, *dont l'une passe par un point* A, *pris arbitrairement dans le corps.*

Indépendamment du point A, prenons deux points B, C dans l'intérieur du corps, et joignons A, B, C aux points d'application de toutes les forces données. Soit, pour fixer les idées, m le point d'application de la force F. Nous pouvons toujours décomposer F en trois forces dirigées suivant mA, mB, MC (145). Si nous opérons de même pour F', F'',..., nous obtiendrons trois groupes de forces concourantes; et, sans rien changer à l'état du corps, nous pourrons remplacer ces trois groupes par trois *résultantes partielles* P, Q, R, respectivement appliquées en A, B, C (*). Ainsi déjà, *toutes les forces données peuvent être réduites à trois forces passant par trois points pris arbitrairement dans le corps.*



Pour opérer une nouvelle réduction, imaginons l'intersection AD des plans ABQ, ACR; ou, si ces plans se confondent, menons la droite AD de manière qu'elle rencontre les directions des forces Q et R. Dans les deux cas, tirons les droites DB, DC. La force Q, située dans le plan ABD, peut être décomposée en deux forces

(*) S'il arrivait que les forces du premier groupe se fissent équilibre, on aurait à considérer seulement les forces qui concourent soit en B, soit en C; et ainsi de suite.

q, q', dirigées, l'une suivant BA, l'autre suivant BD. De même, la force R peut être remplacée par une force r dirigée suivant CA et par une force r' dirigée suivant CD.

Actuellement, les trois forces *concourantes* P, q, r ont, en général, une résultante unique S passant en A; les deux forces concourantes q', r' ont, pareillement, une résultante unique T passant en D. Ces deux forces S, T, dont la première est appliquée au point A pris arbitrairement dans le corps solide, peuvent donc tenir lieu de toutes les forces F, F', F",.... C'est ce qu'il fallait démontrer.

274. Remarque. — *La somme des travaux élémentaires des forces* F, F', F",... *est égale à la somme des travaux des deux résultantes* S, T.

En effet, 1° le travail élémentaire de la force F est égal à la somme de ses composantes suivant mA, mB, mC (167);

2°. Par suite, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces données est égale, soit à la somme des travaux élémentaires des trois résultantes P, Q, R, soit à la somme des travaux élémentaires des résultantes S, T.

275. Lemme. — *Pour que les forces* F, F', F",... *se fassent équilibre, il faut et il suffit que les forces* S, T *soient égales et directement opposées.*

276. Théorème II. — *Pour que des forces* F, F', F",..., *appliquées à un corps solide, se fassent équilibre, il faut et il suffit que la somme de leurs travaux élémentaires soit constamment nulle.*

1°. *S'il y a équilibre* entre les forces données, les résultantes S, T sont égales et directement opposées (96); donc leurs travaux élémentaires sont égaux et de signes contraires; et, conséquemment, *la somme des travaux élémentaires des forces* F, F', F",... *est nulle.*

2°. Si cette somme est nulle, les travaux élémentaires des résultantes S, T sont égaux et de signes contraires (274); d'où il résulte que ces deux forces sont égales et directement opposées.

Pour le faire voir, supposons que A, B soient leurs points d'application. Si l'on fait tourner le corps solide autour du point A, le travail de la force S sera constamment nul. Donc l'équation

$$\mathfrak{T}S + \mathfrak{T}T = 0$$

se réduit à $\mathfrak{T}\,T = o$. Par conséquent, *la direction de la force* T *est normale à l'élément décrit par le point* B (157), c'est-à-dire qu'elle passe par le centre A de la sphère sur laquelle est situé ce point : en d'autres termes, *la force* T *est dirigée suivant le prolongement de* AB. On en peut dire autant de la force S ; donc *les résultantes* S, T *sont directement opposées.* La somme de leurs travaux étant nulle, par hypothèse, il faut évidemment que ces forces soient égales. Ainsi, *lorsque la somme des travaux élémentaires des forces données est nulle, il y a équilibre.*

Le théorème est donc démontré.

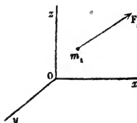
277. *Corollaire.* — La *condition générale de l'équilibre* d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide entièrement libre, est exprimée par l'équation

$$\Sigma \mathfrak{T} F = o.$$

Équations de l'équilibre.

278. La condition précédente, appliquée successivement à tous les petits déplacements que l'on peut imprimer au corps solide, conduirait à une *infinité d'équations* différentes (du moins en apparence), vérifiées si les forces proposées se font équilibre. Nous allons montrer que toutes ces équations sont comprises dans six équations principales, *nécessaires et suffisantes*, appelées, pour cette raison, *les six équations de l'équilibre.*

279. Soit F_1 l'une des forces qui agissent sur le corps solide; soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangulaires de son point d'application m_1, et α, β_1, γ_1 les angles formés, avec les trois axes, par la direction m_1F_1.



Si nous imprimons au corps un petit *mouvement de translation*, parallèle à l'axe des x, le travail élémentaire de la force F_1 sera $\epsilon F_1 \cos\alpha_1$, ϵ représentant le chemin parcouru par chacun des points du corps. Les travaux des autres forces seront, semblablement,

$\varepsilon F_2 \cos\alpha_2$, $\varepsilon F_3 \cos\alpha_3, \ldots$; en sorte que *l'équation du travail* (277) deviendra $\varepsilon \Sigma F \cos\alpha = 0$,

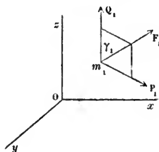
ou $$\Sigma F \cos\alpha = 0. \quad (1)$$

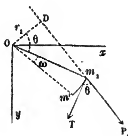
Des translations parallèles à l'axe des y ou à l'axe des z donnent, de la même manière,

$$\Sigma F \cos\beta = 0, \quad (2)$$
$$\Sigma F \cos\gamma = 0. \quad (3)$$

Ainsi, *quand il y a équilibre, les sommes des composantes des forces données, parallèles à trois axes rectangulaires quelconques, sont séparément nulles.*

280. Donnons maintenant au corps un *petit mouvement de rotation* autour de l'axe Ox; et, pour évaluer plus commodément le travail de la force F_1, décomposons cette force en deux autres : l'une, Q_1, parallèle à Ox, et l'autre, P_1, parallèle au plan des yz. La composante Q_1, normale au petit arc décrit par le point m_1, a un travail nul. Par conséquent, le travail de la force F_1 se réduit à celui de la composante P_1.





La seconde figure, qui représente une projection sur le plan des yz ou sur un plan parallèle, passant par le point m_1, montre que le travail élémentaire de P_1 a pour valeur $P_1 . m_1 m'_1 . \cos\theta$. Mais, ω étant l'angle de rotation, $m_1 m'_1 = O m_1 . \omega$. De plus, si nous appelons p_1 *la plus courte distance* OD *entre l'axe* Ox *et la direction de la force* F_1, $\cos\theta = \frac{p_1}{O m_1}$. Donc

$$\mathfrak{G} P_1 = \mathfrak{G} F_1 = P_1 p_1 \omega = F_1 p_1 \sin\alpha_1 . \omega.$$

Les autres forces F_2, F_3,..., donnant lieu à des décompositions semblables, on voit que l'équation générale,

$$\Sigma \mathfrak{C} F = 0,$$

devient $$\omega \Sigma F p \sin\alpha = 0,$$

ou plutôt $$\Sigma F p \sin\alpha = 0. \quad (4)$$

Sans nouveau calcul, nous pouvons écrire les deux dernières *équations de l'équilibre :*

$$\Sigma F q \sin\beta = 0, \quad (5)$$
$$\Sigma F r \sin\gamma = 0. \quad (6)$$

Les équations (4), (5), (6) prouvent que : *s'il y a équilibre, les sommes des moments des forces données, par rapport à trois axes rectangulaires quelconques, sont séparément nulles* (*).

281. On vient de voir que si les forces F_1, F_2, F_3,..., se font équilibre, par l'intermédiaire du corps solide, elles satisfont aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) : ces équations sont donc nécessaires. Il reste à démontrer qu'elles sont *suffisantes*. A cet effet, remplaçons les forces données par deux forces S, T (273). Nous aurons, en *prenant pour origine le point d'application de* S :

$$S\cos\lambda + T\cos\lambda' = 0, \quad (1')$$
$$S\cos\mu + T\cos\mu' = 0, \quad (2')$$
$$S\cos\nu + T\cos\nu' = 0, \quad (3')$$
$$T l \sin\lambda' = 0, \quad (4')$$
$$T m \sin\mu' = 0, \quad (5')$$
$$T n \sin\nu' = 0. \quad (6') \ (**)$$

On déduit, des trois premières équations, $S^2 = T^2$; puis,

$$S = T, \quad \cos\lambda = -\cos\lambda', \quad \cos\mu = -\cos\mu', \quad \cos\nu = -\cos\nu'.$$

Ainsi, *les forces* S, T *sont égales, parallèles et de sens contraires.*

(*) Il est bon de remarquer, en passant, que *le travail élémentaire d'une force, pour une rotation autour d'un axe, est égal au produit du moment de cette force, par rapport à l'axe, par l'angle de rotation.*

(**) l, m, n sont les plus courtes distances entre la direction de la force T et les trois axes; λ, μ, ν représentent les angles qui déterminent la direction de S; etc.

D'un autre côté, les équations (4'), (5'), (6') donnent $l = o$, $m = o$, $n = o$ (*); donc *la direction de la force* T *passe par le point d'application de la force* S; par suite, *les forces* S, T *sont directement opposées*. Il y a donc équilibre.

282. *Remarques*. — I. Si l'on imprime au corps solide une translation ou une rotation *quelconque*, l'équation à laquelle on parviendra, en exprimant que la somme des travaux élémentaires est nulle, sera *une conséquence des six équations de l'équilibre* (**).

II. Pour abréger, on représente souvent par X, Y, Z les sommes des composantes des forces F_1, F_2, F_3,..., et par L, M, N les sommes de leurs moments. Les équations de l'équilibre prennent alors la forme *symbolique :*

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o, \quad L = o, \quad M = o, \quad N = o.$$

III. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1, ou plutôt les coordonnées d'un point quelconque de la droite suivant laquelle agit la force F_1. On trouve aisément (*D. D.*, 116)

$$p_1 = \frac{y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1}{\sin\alpha_1},$$

$$q_1 = \frac{z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1}{\sin\beta_1},$$

$$r_1 = \frac{x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1}{\sin\gamma_1};$$

donc

$$L = \Sigma F (y \cos\gamma - z \cos\beta),$$

$$M = \Sigma F (z \cos\alpha - x \cos\gamma),$$

$$N = \Sigma F (x \cos\beta - y \cos\alpha).$$

IV. Les six équations de l'équilibre renferment, comme cas particulier, les conditions de l'équilibre de *forces concourantes*, de

---

(*) T est différent de zéro, et les trois sinus ne sont pas nuls à la fois. Si l'on avait $\sin\lambda' = o$, les équations (5'), (6') donneraient

$$m = o, \quad n = o:$$

la force T serait dirigée suivant l'axe des x; etc.

(**) Nous engageons le lecteur à vérifier, par un calcul direct, ce corollaire évident des principes ci-dessus démontrés.

forces parallèles, de *forces situées dans un plan*, de *forces parallèles à un plan*, *etc.* Elles donnent également les conditions de l'équilibre d'un corps solide qui, au lieu d'être entièrement libre, renferme *un point fixe* ou *un axe fixe* (*).

Cas où les forces ont une résultante unique.

283. Soit R cette résultante; soient a, b, c les coordonnées de son point d'application, et λ, μ, ν les angles formés, avec les axes, par sa direction. Si l'on joint, aux forces proposées, une force égale et contraire à R, il y aura équilibre. On aura donc, en conservant les notations précédentes :

$$-\mathrm{R}\cos\lambda+\mathrm{X}=0, \quad -\mathrm{R}\cos\mu+\mathrm{Y}=0, \quad -\mathrm{R}\cos\nu+\mathrm{Z}=0,$$
$$-\mathrm{R}(b\cos\nu-c\cos\mu)+\mathrm{L}=0,$$
$$-\mathrm{R}(c\cos\lambda-a\cos\nu)+\mathrm{M}=0,$$
$$-\mathrm{R}(a\cos\mu-b\cos\lambda)+\mathrm{N}=0.$$

Au moyen des trois premières équations, on transforme ainsi les dernières :

$$b\mathrm{Z}-c\mathrm{Y}+\mathrm{L}=0, \quad c\mathrm{X}-a\mathrm{Z}+\mathrm{M}=0, \quad a\mathrm{Y}-b\mathrm{Z}+\mathrm{N}=0. \quad (1).$$

284. Ces nouvelles équations, dans lesquelles a, b, c sont *les coordonnées d'un point quelconque de la droite* suivant laquelle agit la résultante, représentent les trois projections de cette ligne : puisqu'elles coexistent, les quantités L, M, N, X, Y, Z doivent satisfaire à l'*équation de condition*

$$\mathrm{LX}+\mathrm{MY}+\mathrm{NZ}=0,$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (1), après les avoir multipliées, respectivement, par a, b, c. Cette équation exprime la relation à laquelle doivent satisfaire les forces proposées, pour qu'elles aient une résultante unique.

(*) La recherche de ces conditions particulières constitue d'intéressants problèmes, sur lesquels le lecteur pourra s'exercer.

EXERCICES.

I. *Théorème.* — Lorsque des forces sont en équilibre dans l'espace, si l'on décompose chacune d'elles en deux autres, de manière que les premières composantes agissent dans un même plan, et que les secondes soient parallèles à une droite donnée : chacun de ces deux systèmes de composantes sera séparément en équilibre.

II. *Théorème.* — Si l'on projette sur un plan, des forces en équilibre dans l'espace, les projections représentent des forces qui se font équilibre.

III. *Théorème.* — Si l'on réduit un système quelconque de forces, d'une infinité de manières, à deux forces S, T, le tétraèdre construit avec les droites qui représentent ces deux résultantes, prises comme arêtes opposées, a un volume constant. (Chasles.)

IV. *Théorème.* — Si l'on réduit un système de forces, d'abord à deux forces S, T, ensuite à deux autres forces S', T', les directions de ces quatre résultantes sont situées sur un hyperboloïde à une nappe. (Chasles.)

V. *Théorème.* — Pour que quatre forces, P, Q, S, T, situées ou non situées dans un même plan, mais non appliquées en un même point, se fassent équilibre, il faut et il suffit :

1°. Que deux de ces forces, par exemple les forces P, Q, soient représentées, en grandeur et en direction, par les deux côtés opposés AB, CB d'un quadrilatère ;

2°. Que les deux autres forces, S, T, soient représentées par des droites égales et parallèles aux deux autres côtés AD, BC du quadrilatère ;

3°. Que les directions de ces deux dernières forces rencontrent les côtés BC, AD en des points E, F tels, que l'on ait

$$\frac{BE}{CE}=\frac{DF}{AF};$$

4°. Enfin, que les forces P, Q agissent en sens contraires, et qu'il en soit de même pour les forces S, T.

VI. *Théorème.* — La *fonction des forces*, désignée par

$$LX+MY+NZ,$$

représente le sextuple de la somme des tétraèdres ayant pour arêtes

opposées les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces données, ces droites étant prises deux à deux.

VII. Connaissant les moments L, M, N d'une force F, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, trouver le moment $\mathfrak{M}$ de cette force, par rapport à un axe OA.

Résultat : Si λ, μ, ν sont les angles formés par OA avec les axes primitifs,

$$\mathfrak{M} = \mathrm{L}\cos\lambda + \mathrm{M}\cos\mu + \mathrm{N}\cos\nu.$$

CHAPITRE XVII.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES.

Définition des machines.

285. On donne généralement le nom de *machine* à *tout système dans lequel les mouvements des diverses parties sont gênés par des obstacles :* une *locomotive* est une machine, parce que les *pistons,* les *balanciers,* les *bielles* qu'elle renferme, au lieu d'être *entièrement libres,* ne peuvent se mouvoir que d'une certaine manière.

286. Quand le système se réduit à *un seul corps solide,* gêné par *un seul obstacle,* il prend le nom de *machine simple.* Les *organes* ou les *éléments* d'une *machine composée* quelconque, sont toujours des machines simples.

287. On ne compte que trois machines simples : le *levier,* le *tour* et le plan *incliné.* Dans la première, l'obstacle est un *point fixe,* autour duquel le corps solide peut tourner dans tous les sens. Dans la deuxième, l'obstacle est un axe fixe, autour duquel le corps peut prendre un *mouvement de rotation.* Enfin, dans la troisième machine simple, l'obstacle est un *plan fixe,* sur lequel le corps peut *glisser* (*).

(*) Il y a cette différence entre les trois machines simples, que, dans les deux premières, le point fixe et l'axe fixe font habituellement partie du corps, tandis que, dans la troisième, le plan fixe est extérieur au

288. *Autre définition des machines.* — La définition précédente est celle que l'on doit donner quand on considère les machines d'une manière abstraite (*), sans avoir égard aux effets qu'elles peuvent produire. Ces effets, de natures très-diverses, peuvent être envisagés sous deux points de vue différents, correspondant aux deux divisions principales de la Mécanique. Quand on considère les mouvements des différentes parties d'une machine, sans se préoccuper des forces qui les produisent, on peut dire que *les machines sont des systèmes au moyen desquels on effectue des transformations de mouvements* (*B., Mécanique*, 35). Mais si l'on veut indiquer, tout à la fois, la nature et l'usage principal des machines, on peut adopter la définition suivante, à laquelle nous nous arrêterons :

Une machine est un système à liaison complète (**), *destiné à transmettre le travail de forces données.*

289. Ce nouvel énoncé nécessite quelques explications.

En premier lieu, rappelons un principe de Mécanique industrielle, donné dans le nº 152 : *Une force n'est utile, que si elle fait mouvoir le point d'application de la résistance qu'elle est destinée à vaincre.*

D'un autre côté, une machine quelconque, simple ou composée, est toujours formée de trois parties : 1° un organe, appelé *récepteur,* sur lequel agit la force donnée, ou la *puissance,* en produisant un *travail moteur* (158); 2° des pièces, nommées *organes de transmission de mouvement,* ou simplement *transmissions,* intermédiaires entre le récepteur et le point d'application de la *résistance* à vaincre; 3° enfin, l'*appareil opérateur* ou l'*outil,* qui agit sur ce point d'application, en sens contraire de la résistance, de manière que le travail de cette dernière force est un *travail résistant* (158). En outre, la liaison établie entre les deux organes ex-

---

corps. On conçoit, en effet, que si un corps solide renfermait un *plan fixe*, ou seulement *trois points fixes,* non en ligne droite, il ne pourrait prendre aucun mouvement.

(*) Cette définition était employée dans les anciens *Traités de Statique.*

(**) Par cette expression : *liaison complète,* on entend, conformément à la définition précédente, que *les diverses parties dont se compose la machine sont solidaires les unes des autres.*

trêmes, au moyen des *transmissions*, est complète, c'est-à-dire que si le *récepteur* a un certain mouvement, l'*outil* est *contraint* à se mouvoir d'une manière *déterminée*.

Dans le cas très-simple d'une *poulie fixe*, servant, par l'intermédiaire d'une corde AB, à soulever un seau B, le *récepteur* est l'extrémité A de la corde; le crochet servant à suspendre le seau est l'*outil;* enfin, les *organes de transmission de mouvement* sont la corde et la poulie. De plus, le travail de la force musculaire appliquée en A est *moteur,* tandis que le travail de la pesanteur, dans le mouvement ascendant du fardeau B, est *résistant*.

290. *Remarque*. — On doit toujours compter, comme forces motrices ou résistantes, les poids des diverses parties de la machine. Dans l'exemple précédent, la résistance à vaincre était précisément le poids de l'eau et du seau (*). Au contraire, dans les horloges, le *moteur* est un poids. Enfin, pour régulariser le jeu de la machine, on emploie fréquemment des pièces très-lourdes, appelées *volants*.

Du mouvement uniforme des machines.

291. Quand une machine part de l'état de repos, les parties qui la composent se meuvent d'abord avec lenteur, puis de plus en plus rapidement, et la vitesse de chacune atteint bientôt un certain maximum qu'elle ne peut dépasser, parce que les forces motrices dont on dispose sont nécessairement *finies* (**). Arrivé à cet état régulier, l'appareil peut être considéré, à un instant quelconque, comme un système de corps qui se mouvraient en vertu seulement de leur inertie. *Les forces appliquées à la machine se font* donc *équilibre* (90); et, par conséquent, *la somme de leurs travaux est constamment nulle* (277).

292. Ces forces peuvent être réparties en trois groupes : 1° les *puissances* ou *forces motrices;* 2° les *résistances extérieures* ou *résistances principales;* 3° les *résistances intérieures* ou *résistances passives*.

Nous avons parlé déjà des forces motrices et des résistances prin-

(*) En négligeant, bien entendu, le frottement de l'*axe* contre la *chape*.

(**) Cette proposition est une conséquence du *principe des forces vives*.

cipales (289). Quant aux résistances passives, elles sont ordinairement de quatre espèces : 1° la *roideur des cordes ;* 2° les *frottements ;* 3° les *chocs qui déforment les pièces* ou *ébranlent le sol ;* 4° la *résistance des milieux* dans lesquels fonctionne la machine.

293. *Remarque.* — Ces résistances passives, qui peuvent, dans certains cas, se réduire au frottement des pièces les unes sur les autres, naissent aussitôt que la machine commence à se mouvoir, et persistent pendant toute la durée du mouvement. Si donc on peut se représenter une machine à laquelle ne seraient appliquées, après la *mise en train,* ni forces motrices, ni résistances principales, on ne doit jamais faire abstraction des résistances passives, sous peine d'arriver à des conclusions très-éloignées de la vérité. C'est pour avoir ignoré cet axiome de la théorie des machines : *il n'y a pas de mouvement sans frottement,* que bien des personnes ont perdu leur temps à chercher le *mouvement perpétuel.*

Principe de la transmission du travail.

294. Une force motrice tend à accélérer la vitesse de son point d'application ; le travail de cette force est donc positif (158). Au contraire, les résistances, soit extérieures, soit passives, produisent des travaux négatifs. D'après cela, si l'on représente par T_m la somme des travaux des forces motrices appliquées à une machine, par $-T_r$ et $-T_p$ les sommes des travaux dus aux résistances principales et aux résistances passives, on aura, pour toute la durée du mouvement uniforme de la machine, ou pour une partie quelconque de ce temps :

$$T_m - T_r - T_p = 0. \quad (1)$$

En effet, cette équation exprime qu'il y a équilibre entre toutes les forces appliquées à la machine (277).

295. Le mouvement de la machine étant uniforme, la pression exercée, de dedans en dehors, en un point quelconque de l'*outil,* est égale et contraire à la résistance qu'éprouve ce point de la part du corps sur lequel agit la machine. Il résulte de là que le *travail résistant principal* $-T_r$, est égal et de signe contraire au travail produit par l'outil : ce dernier, que l'on appelle *travail utile,* est donc exprimé par T_r. Or, l'équation (1) équivaut à

$$T_r = T_m - T_p. \quad (2)$$

Ainsi, *dans toute machine à l'état de mouvement uniforme, le travail utile est égal au travail moteur, diminué du travail dû aux résistances passives.*

296. S'il était possible de supprimer complétement ces dernières résistances, le travail utile serait égal au travail moteur, en sorte que la machine transmettrait intégralement, à l'outil, le travail des forces appliquées au récepteur; mais, comme ces résistances existent par cela seul que la machine agit (293), on a nécessairement :

$$T_r < T_m. \quad (3)$$

Ainsi, *le travail utile est toujours moindre que le travail moteur.*

Impossibilité du mouvement perpétuel.

297. Dans le cas où l'outil ne rencontrerait aucune résistance, et où, conséquemment, *la machine ne produirait aucun effet utile,* l'équation (1) donnerait

$$T_m = T_p. \quad (4)$$

Ainsi, *pour entretenir le mouvement d'une pareille machine, on devrait lui appliquer un moteur capable de faire équilibre, à chaque instant, aux résistances passives.* Il n'est donc pas possible d'imaginer un appareil dont le mouvement soit continu, et qui n'exige pas, de temps à autre, l'action d'une force motrice extérieure. En d'autres termes, ainsi que le faisait pressentir la remarque du n° 293, *il ne peut y avoir de mouvement perpétuel.*

298. *Remarque.* — Les corps célestes semblent échapper à cette loi : c'est peut-être parce qu'ils se meuvent dans des espaces dépourvus de matière pondérable. En effet, la présence d'un milieu résistant suffirait pour accélérer peu à peu la vitesse d'une planète et pour diminuer les dimensions de son orbite; en sorte que, dans la suite des siècles, la planète finirait par se précipiter sur le soleil.

299. Si le mouvement perpétuel n'est pas réalisable, à plus forte raison est-il *impossible,* au moyen d'une machine, *de multiplier le travail moteur.* Dire qu'*une machine produit de la force,* c'est proférer un non-sens.

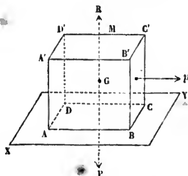
Rendement d'une machine.

300. L'inégalité (3) revient à $\frac{T_r}{T_m} < 1$: *le rapport du travail utile au travail moteur est toujours inférieur à l'unité.* A cause de $\frac{T_r}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m}$, il est clair que, moins il y aura de résistances passives, plus ce rapport $\frac{T_r}{T_m}$, appelé *rendement* de la machine, s'approchera de l'unité. Dans les meilleures machines, le rendement est à peu près égal à $\frac{3}{4}$.

Du frottement.

301. On désigne, en général, sous le nom de *frottement, la résistance au glissement ou au roulement d'un corps sur un autre corps.*

Pour expliquer cette définition, considérons le cas, purement hypothétique, d'un parallélipipède rectangle M reposant, par une face ABCD parfaitement plane, sur un plan XY inébranlable et horizontal. Puisque le corps est en repos, il y a équilibre entre son poids P et la *réaction* R exercée par le plan XY (96) : *cette force* R *est* donc verticale, c'est-à-dire *normale à la surface de contact* ABCD.



Il semblerait, d'après cela, que si l'on applique, perpendiculairement à la face verticale BB'CC', une *traction p, aussi petite qu'on le voudra,* le parallélipipède se mouvra sur le plan fixe, dans le sens de la force p : en effet, les forces R et P se faisant équilibre, le solide M peut être assimilé à un corps privé de pesanteur et *entièrement libre.*

Dans la réalité, les choses ne se passent pas de cette manière : quel que soit le degré de *poli* du plan fixe et de la *face d'appui* ABCD, le parallélipipède reste en repos tant que p n'atteint pas un certain minimum. Il y a plus : *pour entretenir la vitesse* ac-

quise par le corps, on doit faire agir constamment la force p, avec l'intensité qu'elle avait quand le mouvement a commencé, ou avec une intensité un peu moindre. Ce résultat serait contraire aux principes fondamentaux de la Mécanique (83, 98, etc.), si l'on pouvait admettre que les surfaces des deux corps en contact sont *continues*, comme les surfaces idéales que l'on considère dans la Géométrie. On doit donc tirer, de l'expérience précédente, les conclusions suivantes:

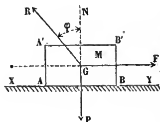
1°. *La surface d'un corps quelconque est toujours hérissée d'aspérités;*

2°. *Quand deux corps sont en contact, suivant une certaine surface, les aspérités de l'un s'engagent entre les aspérités de l'autre;*

3°. *Pour faire glisser ou rouler le premier corps sur le second, il est nécessaire d'employer une certaine force, destinée à vaincre la résistance que ces aspérités opposent au mouvement.*

302. Le *frottement* est dit *de première* ou *de seconde espèce*, selon que les deux corps *glissent* ou *roulent* l'un sur l'autre. On doit prévoir que *le frottement de roulement est bien moins considérable que le frottement de glissement*. Aussi, quand on veut donner une grande mobilité à l'axe d'une roue, au lieu de l'engager dans deux tourillons, on fait simplement reposer chacune de ses extrémités sur les circonférences de deux roues. Cette disposition est adoptée dans la machine d'Atwood.

303. Reprenons l'expérience ci-dessus, et supposons que, pour conserver au corps M la vitesse qu'il avait à un certain moment, on soit obligé de lui appliquer une *force constante* F, dont la direction passe par le centre de gravité G. Le mouvement étant uniforme, il doit y avoir équilibre entre le poids P, la force de *traction* F et la réaction du plan : *cette dernière force*, égale et directement opposée à la résultante des deux autres, *est* donc *située dans le plan vertical* PGF; et, au lieu d'être dirigée normalement à la surface de contact AB, *elle fait, avec la verticale* GN, *du côté opposé à la force de traction, un angle aigu* NGR.



Si nous décomposons la réaction R en deux forces, l'une dirigée suivant GN, l'autre dirigée suivant le prolongement de GF, ces deux forces seront égales, respectivement, à P et à F; donc

$$R \cos \varphi = P, \quad (1)$$

$$R \sin \varphi = F. \quad (2)$$

Ces équations donnent

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{F}{P}.$$

Ainsi, l'angle φ est d'autant plus grand que la force F, nécessaire pour vaincre la résistance au glissement, est plus considérable : pour cette raison, φ est appelé *angle de frottement*. Quant au frottement lui-même, il est égal à la composante $R \sin \varphi$; car le mouvement du corps M étant uniforme, il y a équilibre entre la force F et la résistance au glissement; et cette résistance est précisément le frottement (301).

Expériences de Coulomb (*).

304. Pour découvrir les lois du *frottement de première espèce*, Coulomb s'est servi d'un appareil dont voici la description sommaire :

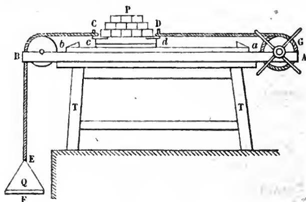
Sur une table T, solidement établie, étaient placées deux pièces de bois de chêne AB (**) portant un madrier *ab*, également en chêne, dont la surface avait été dressée avec soin. Un *traîneau* CD, pouvant recevoir des poids, portait, à sa partie inférieure, soit deux petits *liteaux cd*, soit des règles de différentes largeurs, formées d'une des substances à essayer. Le madrier pouvait également recevoir des règles ou *rails* d'une autre matière. Une corde CE, passant sur une poulie de renvoi, était attachée au traîneau, et se terminait par un plateau F, sur lequel on pouvait placer des poids.

Le traîneau ayant été amené vers l'extrémité A du madrier, au moyen du petit *treuil* G, on le chargeait; on chargeait également le plateau; et, pour déterminer le mouvement, on frappait légèrement le traîneau, ou on le pressait au moyen d'un petit

(*) Mémoires de l'Académie des Sciences, *Savants étrangers*, 1785.

(**) Sur la figure, qui est une projection verticale, on n'en voit qu'une.

levier portant contre un *taquet* attaché à l'extrémité du madrier.



Le poids du plateau servait de mesure à la traction horizontale qui produisait le mouvement, traction égale et contraire au *frottement* exercé par le dessous du traîneau sur le madrier ou sur les rails (*). Coulomb observait ensuite la loi du mouvement en mesurant, au moyen d'un pendule à demi-secondes, les temps t, t' qu'employait le traîneau pour parcourir une première longueur de 2 *pieds*, puis une autre longueur de 2 pieds. Cette seconde expérience pouvait servir à vérifier si, comme l'avait soupçonné Coulomb, le *frottement pendant le mouvement* était une force retardatrice constante, auquel cas le mouvement du traîneau devait être uniformément accéléré.

305. En effet, dans cette hypothèse, soient

$$e = \frac{1}{2} wt^2, \quad 2e = \frac{1}{2} w(t + t')^2 \quad (1)$$

les espaces parcourus pendant les temps t et $t + t'$, w étant l'accélération. Ces deux équations donnent

$$2 = \left(\frac{t + t'}{t}\right)^2,$$

puis $$t' = t\left(\sqrt{2} - 1\right) = t.0,41.$$

(*) **Suivant Coulomb, le *frottement au départ* dépend du temps θ pendant lequel le traîneau a reposé sur le madrier. La formule empirique est**

$$F = A + B \sqrt[4]{\theta}.$$

Ainsi, le temps t' pendant lequel le traîneau parcourait le second espace de 2 pieds devait être environ les 0,4 du temps t. C'est ce que l'expérience justifia sensiblement.

306. Pour découvrir la relation entre le frottement et la pression, appelons P le poids total du traîneau, Q le poids total du plateau (*), F le frottement. La force qui produit le mouvement du système $P+Q$ est $Q-F$ (**); donc

$$Q - F = \frac{P+Q}{g}\,w,$$

ou

$$\frac{F}{P} = \frac{Q}{P} - \left(1 + \frac{Q}{P}\right)\frac{w}{g}. \quad (2)$$

L'accélération w étant déterminée par l'une ou l'autre des formules (1), *le rapport du frottement à la pression* est donc connu : d'après les expériences de Coulomb, répétées et modifiées par M. Morin (***), *ce rapport dépend uniquement de la nature des surfaces frottantes,* c'est-à-dire qu'il ne variait pas quand on changeait le poids Q ou, ce qui est équivalent, la vitesse du traîneau.

Lois du frottement.

307. On peut les résumer ainsi :

I. *Le frottement au départ est :*

1°. *Proportionnel à la pression exercée sur le corps en repos par le corps en mouvement ;*

2°. *Indépendant de l'étendue des surfaces en contact* (****).

(*) Dans une évaluation de cette nature, on peut négliger le poids variable de la partie BE de la corde.

(**) Ce raisonnement est celui dont nous avons fait usage à propos de la machine d'Atwood.

(***) Voici le résultat d'une expérience de M. Morin :
Chêne sur chêne,

$$P = 1039^{k},03, \quad Q = 528^{k},19, \quad w = 0^{m},361.$$

Par suite,

$$F = 528,19 - \frac{1567,22.0,361}{9,80896} = 489,96, \quad \frac{F}{P} = f = 0,471.$$

(****) Pourvu que le corps frottant ne se réduise pas à une *lame* ou à une *pointe*.

II. *Le frottement pendant le mouvement est :*

1° *Proportionnel à la pression;*

2° *Indépendant de l'étendue des surfaces en contact;*

3° *Indépendant de la vitesse.*

III. *Le frottement au départ est plus grand que le frottement pendant le mouvement* (*).

308. Le rapport $\frac{F}{P}$ est constant pour deux mêmes surfaces frottantes; il varie quand on en modifie la composition : on peut donc désigner ce rapport $\frac{F}{P} = \tang\varphi = f$ sous le nom de *coefficient de frottement*. En voici la valeur dans quelques cas:

(*) Nous compléterons cet énoncé par quelques citations :

1°. Le frottement des bois glissant à sec sur les bois oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions; cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instants du repos; mais après quelques minutes elle parvient ordinairement à son maximum ou à sa limite.

2°. Lorsque les bois glissent à sec sur les bois, le frottement est encore proportionnel aux pressions, mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos....

3°. Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit est également proportionnel aux pressions; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après un temps quelconque de repos, soit qu'on veuille entretenir une vitesse quelconque.

4°. Les surfaces hétérogènes, telles que les bois et les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leur frottement des résultats très-différents de ceux qui précèdent, car l'intensité de leur frottement, relativement au temps de repos, croît lentement, et ne parvient à sa limite qu'après quatre ou cinq jours, et quelquefois davantage.... Ce n'est pas encore tout.... Le frottement croît très-sensiblement à mesure que l'on augmente les vitesses.... Le frottement croît à peu près suivant une progression arithmétique, lorsque les vitesses croissent suivant une progression géométrique. (Mémoire de Coulomb.

SURFACES FROTTANTES.	ÉTAT DES SURFACES	COEFFICIENT DE FROTTEMENT au départ.	COEFFICIENT DE FROTTEMENT pendant le mouvement.
Chêne sur chêne.....	Sans enduit. — Fibres parallèles.........	0,62	0,48
	Frottées de savon sec.	0,44	0,16
Fer sur chêne.........	Sans enduit.........	0,62	0,62
	Mouillées d'eau......	0,65	0,26
Fer sur fonte.........	Sans enduit.........	0,19	0,18
Cuir sur fonte (piston).	Mouillées d'eau......	0,62	0,15
Calcaire tendre sur calcaire tendre........	Sans enduit.........	0,74	0,64

CHAPITRE XVIII.

ÉQUILIBRE ET TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES AU LEVIER.

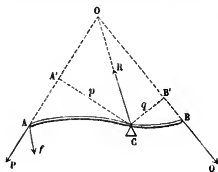
309. Considéré dans toute sa généralité, *le levier est un corps solide, mobile autour d'un point fixe*. Dans la pratique, on donne spécialement le nom de levier à *une barre rigide, droite ou coudée, reposant sur un point fixe*. Les pédales des pianos ou des roues d'émouleurs, les barres de fer employées par les paveurs, etc., sont des leviers par l'intermédiaire desquels une *puissance* et une *résistance* se font équilibre, du moins quand ces machines sont à l'état de mouvement uniforme.

310. Quand le point fixe est situé entre les points d'application des deux forces, le levier est dit du *premier genre*. Il est du *deuxième genre* si le point d'application de la résistance tombe entre le point fixe et le point d'application de la puissance. Enfin, dans le levier du *troisième genre*, le point d'application de la puissance est situé entre l'autre point d'application et le point fixe. La ba-

lance ordinaire et la balance romaine sont des leviers du premier genre; les leviers des tailleurs de pierre appartiennent au deuxième genre; les pédales peuvent être considérées comme des leviers du troisième genre.

311. Quelle que soit l'espèce du levier BAC, *il faut*, pour l'équilibre, *que la puissance* P *et la résistance* Q *aient une résultante égale et directement opposée à la réaction* R *du point fixe* A : car ces trois forces sont les seules qui soient appliquées à la machine (*). *La puissance et la résistance doivent donc être situées dans un même plan passant par le point fixe.*

Cette condition n'est pas suffisante : il faut encore que la somme des travaux des forces P, Q, R soit constamment nulle. La réaction R, passant par le point fixe, a un travail nul; d'un autre côté, si le levier tourne d'un petit angle ω, dans le sens indiqué par la flèche f, les travaux des forces P, Q seront sensiblement $Pp\omega$ et $Qq\omega$, p et q représentant les distances du point fixe aux directions des deux forces, ou les *bras de levier* de ces forces.



La seconde condition de l'équilibre est donc

$$Pp\omega - Qq\omega = 0,$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

Ainsi, *la puissance et la résistance sont en raison inverse de leurs bras de levier.*

312. *Remarques.* — I. Cette condition aurait pu être obtenue indépendamment de la théorie du travail. En effet, les forces P, Q ayant une résultante passant par le point d'appui A, *les distances de ce point aux deux composantes sont en raison inverse de ces composantes* (143, 2°).

(*) On néglige, pour plus de simplicité, le poids du levier.

II. Dans le levier du deuxième genre, supposé rectiligne pour plus de simplicité, le bras de levier de la puissance est plus grand que celui de la résistance. Donc, à cause de $\frac{P}{Q}=\frac{q}{p}$, *la puissance est moindre que la résistance*. Le contraire a lieu dans le levier du troisième genre.

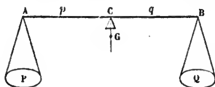
313. Si le levier est sollicité par un nombre quelconque de forces, F, F′, F″,..., *il faut et il suffit*, pour l'équilibre, *que toutes ces forces aient une résultante unique, dont la direction passe par le point fixe*.

314. *Remarques*. — I. On doit comprendre, parmi les forces données, le poids du levier.

II. Si le levier, comme on le suppose souvent, ne fait que *reposer sur une surface fixe*, la condition précédente ne suffit plus : il faut, en outre, que la résultante des forces données soit normale à la surface, au point de contact, et qu'elle presse le levier contre la surface.

De la balance.

315. La *balance* est un levier du premier genre, aux extrémités duquel sont appliqués deux poids P, Q (*). D'après les usages auxquels la balance est destinée, ces poids doivent être égaux quand l'équilibre est établi, c'est-à-dire *quand le fléau* AB *reste horizontal*. En représentant par R le poids de la balance, par r la distance de son centre de gravité G à la verticale passant par le point d'appui, etc., nous aurons, pour l'équation de l'équilibre (280) :



$$P(p-q)+Rr=o.$$

Cette équation, qui doit subsister pour toutes les valeurs de P (**),

(*) Nous ne donnons pas la description complète de la balance : ces détails appartiennent à la Physique.

(**) Du moins entre certaines limites.

se décompose en

$$p = q, \quad r = 0.$$

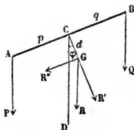
Donc, *pour que la balance soit* JUSTE, *il faut : 1° que les deux bras du fléau soient égaux; 2° que le centre de gravité de la balance soit sur la verticale passant par le point d'appui.*

316. *Remarque.* — Quand la balance est *fausse*, on peut déterminer le poids P d'un corps, soit par la *méthode des doubles pesées*, due à *Borda*, soit en prenant la *moyenne proportionnelle* entre les poids a, b obtenus en plaçant le corps successivement dans les deux plateaux. En effet, de

$$Xp = aq,$$
$$Xq = bq,$$

on conclut, $$X = \sqrt{ab}\ (*).$$

317. *Stabilité et sensibilité de la balance.* Il ne suffit pas qu'une balance soit *juste*, il faut encore qu'elle soit *stable*, c'est-à-dire qu'elle tende à revenir à sa position d'équilibre, quand elle en a été tant soit peu écartée. Il faut, en outre, qu'elle soit *sensible*, ou qu'une légère différence entre les poids P, Q soit manifestée par un défaut d'horizontalité du fléau. La première condition est vérifiée quand *le centre de gravité* G *de l'appareil est au-dessous du point d'appui* C. En effet, le poids R est décomposable en deux forces R′, R″ dirigées suivant le prolongement de CG et suivant la perpendiculaire à cette ligne. La première composante est détruite par le point fixe; l'autre tend à ramener le fléau dans la position horizontale : la balance devient alors un pendule composé.



On voit, avec la même facilité, que si le centre de gravité coïncide avec le point d'appui, la balance reste en équilibre dans toutes ses positions; et que, si le premier point est *au-dessus* du second, l'appareil tend à se renverser dès qu'il est écarté de sa position

(*) Cette formule, qui serait évidemment peu commode dans la pratique, suppose $r = 0$.

d'équilibre. Dans le premier cas, la balance est dite *indifférente;* dans le second, on dit qu'elle est *folle.*

318. *Mesure de la sensibilité.* — Soient : d la distance CG, ϖ le poids additionnel placé dans le plateau A, φ l'angle du fléau avec l'horizon. Nous aurons, en conservant les notations précédentes,

$$(P + \varpi)p\cos\varphi = Qq\cos\varphi + Rd\sin\varphi.$$

Mais, par hypothèse, $P = Q$, $p = q$; donc l'équation se réduit à

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{d} \cdot \frac{\varpi}{R}.$$

Ainsi : 1° pour une même balance, *la tangente de l'angle* φ *est proportionnelle au poids additionnel* ϖ ; 2° toutes choses égales d'ailleurs, *cette tangente varie en raison inverse de la distance d.*

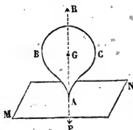
319. En résumé, *pour qu'une balance soit sensible, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du point d'appui, et très-près de ce point* (*).

CHAPITRE XIX.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN CORPS REPOSANT SUR UN PLAN.

Conditions d'équilibre d'un corps reposant sur un plan.

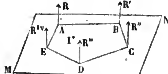
320. Soit d'abord le cas très-simple d'un corps ABC, s'appuyant, par un seul point A, sur un plan *horizontal* MN. Ainsi qu'on l'a vu plusieurs fois, la résistance du plan est représentée par une force R, normale au plan, c'est-à-dire verticale, appliquée au point d'appui A, et dirigée en sens contraire de la pesanteur. Si le corps est sollicité seulement par son poids P, il faudra, pour l'équilibre, que les forces R, P soient



(*) Il résulte encore, de la formule ci-dessus, qu'*une balance très-lourde ne peut être sensible,* du moins en général.

égales et directement opposées. Donc *la verticale abaissée du centre de gravité* G *doit passer par le point d'appui* A (*).

321. Si le corps, toujours supposé sollicité seulement par son poids P, présente divers points d'appui A, B, C, D, E, *il faudra, pour l'équilibre, que la verticale passant par le centre de gravité* G *rencontre le plan* MN *en un point* I *intérieur au polygone convexe déterminé par les points d'appui* (**).



En effet, les résistances opposées par le plan fixe, aux points d'appui A, B, C,..., sont des forces verticales r, r', r'', dirigées de bas en haut, et dont la résultante R est appliquée en un point I, intérieur au polygone convexe ABC.... Cette force R est directement opposée au poids P; donc, etc.

322. Enfin, supposons qu'*un corps sollicité par des forces quelconques* F, F', F'',... (***) *s'appuie sur un plan fixe, par divers points* A, B, C,.... En répétant la démonstration précédente, nous arriverions à cette conclusion générale : *Il faut, pour l'équilibre, que les forces proposées aient une résultante unique, tendant à presser le corps contre le plan, et dont la direction, normale au plan, le rencontre en un point intérieur au polygone déterminé par les points d'appui* (****).

323. *Pressions exercées sur les points d'appui.* — Reprenons

(*) Si le corps, comme on l'a supposé sur la figure, se termine par une pointe, l'équilibre est nécessairement *instable*. Au contraire, l'équilibre est *stable* quand le corps a une forme aplatie, et que la distance entre le centre de gravité et le point d'appui est très-petite. Ces résultats, sur lesquels nous ne pouvons insister, sont d'accord avec ce qu'on a vu à propos des diverses espèces de balances.

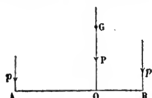
(**) Quelle que soit la disposition des points d'appui, il est toujours possible de former un polygone convexe ayant pour sommets plusieurs de ces points, et qui contienne tous les autres dans son intérieur.

(***) Parmi ces forces, on doit toujours comprendre le poids P du corps.

(****) Les conditions trouvées ci-dessus sont nécessairement comprises dans les six équations de l'équilibre. Nous engageons le lecteur à essayer cette déduction.

le cas d'un corps sollicité seulement par son poids P, reposant sur un plan horizontal; et supposons que le nombre des points d'appui soit successivement un, deux, trois,....

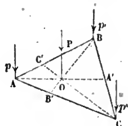
1°. Lorsque le corps repose sur le plan par un seul point, la pression exercée en ce point est évidemment le poids P.



2°. Si le corps présente deux points d'appui A, B, les pressions p, p' exercées en ces deux points, égales et contraires aux résistances r, r', ont pour résultante P (321). Donc, O étant le point où la droite AB est rencontrée par la verticale abaissée du centre de gravité G (226),

$$p = \mathrm{P}\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}, \quad p' = \mathrm{P}\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}.$$

3°. Lorsqu'il y a trois points d'appui A, B, C, non en ligne droite, la direction du poids P rencontre le plan fixe en un point O situé dans l'intérieur du triangle ABC, et les pressions p, p', p'' sont encore déterminées.



En effet, si l'on mène la droite AOA', on pourra regarder P comme la résultante de la pression p qui agit en A, et d'une pression égale à $p' + p''$, agissant en A'. Cette dernière force est elle-même la résultante des pressions p', p'' qui s'exercent en B, C. Par suite

$$\frac{p}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}}, \quad \frac{p'}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}}, \quad \frac{p''}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{CC'}}.$$

Mais, évidemment,

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{BAC}}, \quad \frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}}, \quad \frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{CC'}} = \frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ABC}};$$

donc

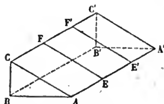
$$\frac{p}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{BOC}}{\mathrm{BAC}}, \quad \frac{p'}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{AOC}}{\mathrm{ABC}}, \quad \frac{p''}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{ACB}}.$$

Ainsi, *les pressions exercées en* A, B, C *sont proportionnelles aux aires des triangles* BOC, COA, AOB.

324. Quand le nombre n des points d'appui A, B, C, D,... surpasse *trois*, les valeurs des pressions exercées en ces points deviennent *indéterminées*; car le poids P peut, *d'une infinité de manières*, être décomposé en forces appliquées aux points A, B, C, D,... (*). Ce résultat paradoxal tient à ce que, contrairement à la réalité, nous avons supposé les corps parfaitement rigides : si l'on avait égard aux *actions moléculaires*, on trouverait que les pressions sont parfaitement déterminées.

Du plan incliné.

325. Soit un prisme droit ABCA'B'C' ayant pour base un triangle rectangle ABC. Si ce prisme repose, par sa face ABB'A', sur un plan horizontal, la face BCB'C' sera verticale, et la troisième face ACA'C' formera ce qu'on appelle un *plan incliné* (**).



Les droites AB, BC, AC sont, respectivement, la *base*, la *hauteur* et la *longueur* du plan incliné; cette dernière droite, perpendiculaire à la *trace horizontale* AA', est la *ligne de plus grande pente* du plan. Il en est de même pour toutes les droites EF, E'F', parallèles à CA.

326. *Équilibre d'un corps reposant sur un plan incliné.* — Considérons un corps M retenu en équilibre sur un plan incliné ABC, ou animé d'une vitesse constante, dirigée parallèlement à la ligne

(*) Cette proposition, qui paraît assez évidente, résulte aussi de la considération des équations

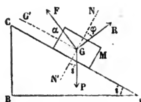
$$p + p' + p'' + \ldots = P,$$
$$px + p'x' + p''x'' + \ldots = Px_1,$$
$$py + p'y' + p''y'' + \ldots = Py_1,$$

données par la théorie des moments. Relativement aux limites entre lesquelles il est permis de faire varier les inconnues $p, p', p'', \ldots$, le lecteur pourra consulter la *Statique* de M. Gerono, remarquable ouvrage, auquel nous avons fait de nombreux emprunts.

(**) C'est-à-dire incliné à l'horizon.

de plus grande pente; et cherchons les relations qui existent entre la *puissance* F, le poids P et la réaction R du plan.

Que le corps soit en repos ou qu'il ait un mouvement uniforme, les trois forces F, P, R devront se faire équilibre; ce qui exige qu'elles soient dans un même plan. Or, la réaction R est située dans le plan normal passant par la direction de la vitesse (303), c'est-à-dire *dans le plan vertical passant par la ligne de plus grande pente;* le poids P est évidemment situé dans ce même plan; donc, *pour l'équilibre, la direction de la puissance* F *doit être située dans le plan vertical passant par la ligne de plus grande pente du plan incliné* (*). Pour plus de simplicité, on peut supposer cette force F appliquée au centre de gravité G.



Cela posé, désignons par *i l'inclinaison du plan*, et par *α l'angle de la puissance avec la ligne de plus grande pente.* Si le mouvement est *ascendant* (**), nous aurons

$$\frac{F}{\sin(P, R)} = \frac{P}{\sin(F, R)} = \frac{R}{\sin(F, P)},$$

ou

$$\frac{F}{\sin(i+\varphi)} = \frac{P}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\alpha\right)} = \frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+i\right)};$$

ou enfin

$$\frac{F}{\sin(i+\varphi)} = \frac{P}{\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{R}{\cos(\alpha+i)}.$$

327. *Remarques.* — I. *L'équilibre sur le plan incliné* est un cas particulier de *l'équilibre d'un corps reposant sur un plan.*

II. Pour faire monter le poids P le long du plan incliné, on doit

(*) Si le mouvement, toujours supposé rectiligne et uniforme, n'avait plus lieu parallèlement à la ligne de plus grande pente, *la puissance* F *devrait être dirigée dans le plan vertical parallèle à la direction du mouvement.*

(**) Dans le cas où le corps descendrait le long du plan incliné, il suffirait de changer φ en $-\varphi$ dans les relations suivantes.

y appliquer une force F, égale à $P\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}$. Cette force atteint son minimum lorsque $\cos(\alpha-\varphi)=1$, auquel cas $\alpha=\varphi$. Ainsi, *la puissance* F, *capable de faire monter uniformément un corps le long d'un plan incliné, est la plus petite possible lorsqu'elle fait, avec le plan, un angle égal à l'angle de frottement.*

328. Supposons que le corps solide, en repos ou animé d'une vitesse constante, ne soit sollicité par aucune puissance. Les forces P, R, devant se faire équilibre, seront égales et directement opposées; par conséquent, les angles NGR, N′GP, opposés au sommet, et formés par des lignes droites, sont égaux; et comme $N'GP=i$, on aura $NGR=i$. Donc,

Pour qu'un corps, sollicité seulement par son poids, descende uniformément le long d'un plan incliné, parallèlement à la ligne de plus grande pente, il faut et il suffit que l'inclinaison du plan soit égale à l'angle de frottement.

329. Si l'on fait abstraction du frottement, c'est-à-dire si l'on suppose $\varphi=0$, les relations (3) se réduisent à

$$\frac{F}{\sin i}=\frac{R}{\cos(i+\alpha)}=\frac{P}{\cos\alpha}. \quad (4)$$

On a donc, dans ce cas,

$$F=P\frac{\sin i}{\cos\alpha}. \quad (5)$$

Ainsi :

1°. *La force* F, *nécessaire pour faire mouvoir uniformément le poids* P *sur un plan incliné, est proportionnelle au sinus de l'inclinaison du plan, et inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la direction de* F *avec la ligne de plus grande pente du plan.*

2°. *La force* F *est la plus petite possible quand elle agit parallèlement à la ligne de plus grande pente.*

330. Remarquons à présent que le triangle rectangle ABC donne

$$\sin i=\frac{BC}{AC};$$

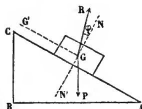
par conséquent, en supposant $\alpha=0$,

$$\frac{F}{P}=\frac{BC}{AC}.$$

Ce résultat s'énonce ainsi :

Quand un poids P, *sollicité par une force* F *parallèle à la ligne de plus grande pente d'un plan, se meut uniformément le long du plan, supposé d'un poli parfait, la puissance est à la résistance comme la hauteur du plan est à la longueur.*

331. *Mouvement varié d'un corps sur un plan incliné.* — Pour nous borner au cas le plus intéressant, supposons que le corps ait été lancé, avec une vitesse initiale a, dans une direction parallèle à AC : il s'élèvera le long du plan incliné, après quoi il redescendra (pourvu que le frottement ne soit pas trop considérable). Le mouvement complet du corps se compose donc d'un *mouvement ascendant*, suivi d'un *mouvement descendant*. Examinons ces deux phases du phénomène.



332. *Mouvement ascendant.* — La force X qui sollicite le corps est dirigée suivant le prolongement de GG'; elle est égale à la *somme* des composantes de P et de R, parallèles à CA; donc

$$X = P \sin i + R \sin \varphi. \quad (6)$$

D'un autre côté, comme il n'y a aucun mouvement dans le sens de la normale NN', les composantes parallèles à cette direction doivent se faire équilibre; en sorte que

$$P \cos i = R \cos \varphi. \quad (7)$$

L'élimination de R, entre les équations (6) et (7), donne

$$X = P \frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}. \quad (8)$$

La force X étant *constante*, le corps a un mouvement *uniformément retardé*, dont les équations sont, en conservant les notations habituelles,

$$\left.\begin{aligned} w &= -g\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}, \\ v &= a - g\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}t, \\ x &= at - \frac{1}{2}g\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}t^2. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

333. Le temps au bout duquel le mobile s'arrêtera, et l'espace e qu'il aura parcouru, sont donnés par les formules

$$t = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}, \qquad e = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}. \quad (10)$$

334. *Mouvement descendant.* — La force X_1 qui produit le mouvement est encore dirigée suivant le prolongement de GG'; mais elle est égale à la *différence* des composantes de P et de F, parce que la réaction R *a changé de sens*. Conséquemment

$$X_1 = P\sin i - R\sin\varphi \ (*),$$

ou, à cause de l'équation (7),

$$X_1 = P\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}. \quad (11)$$

Par suite, les formules qui déterminent le mouvement *uniformément accéléré* du mobile sont

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}, \\ v_1 &= g\frac{\sin(i-\varphi)}{\cos\varphi}t_1, \\ x_1 &= \frac{1}{2}g\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin\varphi}t_1^2. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

335. En comparant le mouvement descendant au mouvement ascendant, nous pouvons chercher *le temps t_1 qu'emploie le mobile pour revenir à sa position initiale.* Supposant $x_1 = e$ (333), nous obtenons

$$t_1 = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin(i+\varphi)\sin(i-\varphi)}}. \quad (13)$$

Nous avons trouvé ci-dessus

$$t = \frac{a}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)};$$

(*) Les calculs suivants supposent la force X_1 positive. Si elle était négative, c'est-à-dire *si le frottement au départ,* représenté par $R\sin\varphi$, *l'emportait sur la composante* $P\sin i$ *du poids* P, *le corps ne redescendrait pas.* Cette circonstance se présente lorsque *l'angle de frottement surpasse l'inclinaison du plan.*

donc $t_1 > t$: *le corps descend plus lentement qu'il n'est monté*. On pouvait prévoir ce résultat; car, dans le mouvement ascendant, les deux forces $P \sin i$, $R \sin \varphi$ tendent à diminuer la vitesse; et, dans le mouvement descendant, l'accroissement de vitesse est dû à la différence de ces deux forces. Du reste, *quand le mobile revient au point de départ, la vitesse* V *qu'il possède est moindre que la vitesse initiale a*. En effet,

$$V = a\sqrt{\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)}}.$$

336. *Equation du travail et des forces vives.* — La relation générale entre ces deux sortes de grandeurs, démontrée ci-dessus (174), peut aisément être vérifiée dans les divers cas dont nous venons de nous occuper : pour abréger, reprenons seulement les deux derniers.

1°. Si le corps s'élève le long du plan incliné, la demi-variation de sa force vive, au bout du temps t, est

$$\frac{1}{2}m(v^2 - a^2) = -\frac{1}{2}mgt\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\left[2a - gt\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\right].$$

D'un autre côté, le travail de la force X, qui est négatif, a pour valeur

$$\mathfrak{T}.X = -Xx = -mg\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\left[at - \frac{1}{2}gt^2\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos\varphi}\right];$$

donc $$\frac{1}{2}m(v^2 - a^2) = \mathfrak{T}.X.$$

2°. Si le mobile, après avoir parcouru l'espace e en montant, est revenu au point de départ, il a perdu une quantité de force vive représentée par

$$m(a^2 - V^2) = ma^2\left[1 - \frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)}\right].$$

En même temps, le travail total des forces X, X_1, qui ont successivement sollicité le corps, est

$$(X_1 - X)e = \frac{P}{\cos\varphi}[\sin(i-\varphi) - \sin(i+\varphi)]\frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}$$
$$= \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)} - 1\right],$$

donc $$\frac{1}{2}m(V^2 - a^2) = \mathfrak{T}X_1 + \mathfrak{T}X.$$

337. *Portion du travail absorbée par le frottement.* — Le travail résistant T, dû au frottement du mobile sur le plan incliné, a pour valeur absolue $Rx \sin\varphi$, x étant l'espace parcouru. Par suite, dans le cas du mouvement ascendant,

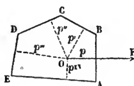
$$T = \frac{1}{2}\frac{a^2}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(i+\varphi)}\cdot R\sin\varphi$$
$$= \frac{1}{4}ma^2\frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i+\varphi)};$$

et, si le mobile revient à sa position initiale,

$$T = \frac{1}{2}ma^2\frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i+\varphi)} + \frac{1}{2}ma^2\frac{\sin\varphi\cos i}{\sin(i-\varphi)}$$
$$= \frac{1}{4}ma^2\frac{\sin 2\varphi\cos 2i}{\sin(i+\varphi)\cos(i-\varphi)}.$$

Stabilité des corps pesants.

338. Supposons, comme dans le n° 321, qu'un corps pesant s'appuie sur un plan horizontal, par une base polygonale ABC.... Pour l'équilibre, il suffit que le point O, où la verticale passant par le centre de gravité du corps rencontre le plan, soit intérieur au *polygone d'appui*. Si les surfaces en contact ont un degré de poli suffisant, une force horizontale F, appliquée au corps, le fera simplement *glisser* sur le plan. Mais si les deux surfaces frottent l'un contre l'autre, ou plutôt si la base ABC.... a légèrement pénétré dans la matière qui constitue le plan, les choses ne se passent plus de la même manière : la force F tend à *renverser* le corps. Admettons, en effet, pour plus de simplicité, que cette force F soit appliquée au centre de gravité du corps et qu'elle soit perpendiculaire à un côté du polygone d'appui, au côté AB, par exemple. D'après les hypothèses précédentes, le corps tournera autour de AB, et se renversera sur le plan, si la résultante du poids P et de la force F rencontre le plan en un point extérieur au polygone d'appui; ou, ce qui est équivalent, si le moment de F, par rapport à AB, l'emporte sur le moment de P. Représentant par h l'ordonnée verti-

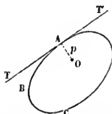


cale du centre de gravité, et par p la distance du point O à l'arête AB, nous aurons, pour valeurs de ces deux moments, Fh et Pp. La condition exprimant la *stabilité de l'équilibre* est donc

$$Pp > Fh. \quad (1)$$

339. *Remarques.* — I. Le produit Pp, qui exprime, en quelque sorte, l'énergie avec laquelle le poids P s'oppose à la rotation autour de AB, est appelé, pour cette raison, *moment de stabilité* par rapport à AB.

II. Soient EA le côté du polygone d'appui, le plus voisin de la projection horizontale O, et Pp^{iv} le moment de stabilité relatif à ce côté. Si ce *moment minimum* surpasse Fh, la force F ne peut faire tourner le corps autour d'aucun des côtés du polygone d'appui, et *la stabilité est assurée.*

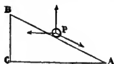


III. Plus généralement, si le corps P a une base curviligne ABC, et si TT' est la tangente la plus voisine du point O, projection horizontale du centre de gravité de P, la relation (1), appliquée à TT', suffit pour que la stabilité soit assurée.

IV. *Toutes choses égales d'ailleurs, la stabilité est la plus grande possible, quand le moment minimum est maximum.*

EXERCICES.

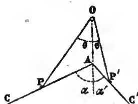
I. Un poids P est maintenu en équilibre sur un plan incliné BA, par trois forces égales à $\frac{P}{3}$, et parallèles, respectivement, à BA, AC, CB. Quelle est l'inclinaison i du plan?



Réponse : $i = \text{arc tang}\,\frac{4}{3}$.

II. Deux poids P, P' s'appuient sur deux plans inclinés et dépolis AC, AC'. Ces deux poids sont réunis par un fil sans pesanteur POP', qui s'enroule sur une poulie O, située au-dessus de l'arête commune A. Quelle est la figure du fil, lorsque le poids P commence à descendre le long du plan incliné AC?

Résultat : Les angles θ, θ' sont déterminés par les deux équations



$$\frac{h \sin \alpha}{\sin(\alpha - \theta)} + \frac{h \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \theta')} = l,$$

$$\frac{\cos(\alpha + \varphi - \theta)}{\cos(\alpha' - \varphi' - \theta')} = \frac{P \cos(\alpha + \varphi)}{P' \cos(\alpha' - \varphi')};$$

dans lesquelles

$$h = OA, \quad l = PO + OP';$$

φ et φ' sont les angles de frottement.

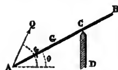
III. Une échelle, dont le poids et la longueur sont donnés, est appuyée contre un mur vertical. Quelle est sa position au moment où elle commence à glisser?

IV. Quelle est la force nécessaire pour retenir, dans une position donnée, une porte dont les gonds ne sont pas sur une même verticale?

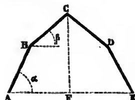
V. Une tige rigide peut tourner librement autour de son extrémité inférieure, tandis que son extrémité supérieure s'appuie contre une droite verticale. Déterminer les pressions exercées par la droite et par la charnière.

VI. Une tige rigide peut tourner librement autour de son extrémité inférieure; son extrémité supérieure est soutenue par un cordon qui s'enroule sur une poulie et qui supporte un poids φ. Déterminer la position d'équilibre.

VII. Déterminer la position d'équilibre d'une tige pesante, reposant sur deux plans inclinés.



VIII. Une barre pesante AB, appuyée sur un étai CD, est soutenue par une force Q qui agit à l'extrémité A, dans une direction donnée. Déterminer la position de la barre, lorsqu'elle est sur le point de glisser dans le sens BA.



IX. Quatre barres égales AB, BC, CD, DE, réunies bout à bout par des charnières B, C, D, sont en équilibre dans un plan vertical; les extrémités A, E sont engagées dans deux charnières situées sur une même horizontale. On connaît la dis-

tance AE, ainsi que la hauteur du sommet D au-dessus de AE. Déterminer la figure d'équilibre (*).

X. Déterminer le mouvement d'un point matériel pesant, lancé sur un plan incliné, non poli, dans une direction faisant un angle α avec la ligne de plus grande pente.

Résultats : 1°. Les équations du mouvement sont

$$x'' = -fg\frac{x'}{s'}, \quad y'' = -g\sin i - fg\frac{y'}{s'},$$

f étant le coefficient de frottement.

2°. En représentant par θ l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec l'axe des ordonnées, on change ces équations en

$$s''\sin\theta + s'\theta'\cos\theta = -fg\sin\theta,$$
$$s''\cos\theta - s'\theta'\sin\theta = -g\sin i - fg\cos\theta.$$

3°. Celles-ci donnent les deux suivantes :

$$s'' = -g\sin i\cos\theta - fg, \quad s'\theta' = g\sin i\cos\theta,$$

que l'on aurait pu obtenir sans aucun calcul.

4°. En désignant par a la vitesse initiale, et en posant

$$k = \frac{\sin i}{f}, \quad c = a\sin\alpha\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\right)^k,$$

on trouve
$$s' = v = \frac{c}{\sin\theta\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\right)^k}.$$

5°. Cette valeur de la vitesse conduit à l'équation

$$\frac{c\theta'}{\sin^2\theta\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\right)^k} = g\sin i;$$

d'où l'on conclut aisément

$$\frac{1}{2}c\left(\frac{z^{1-k}}{1-k} - \frac{z^{-1-k}}{1+k}\right) = gt\sin i + \text{const.}\ (^{**}),$$

(*) La plupart des énoncés précédents sont tirés du Recueil de *M. Jullien.*

(**) Cette équation *primitive* suppose k différent de l'unité. Si $k = 1$, le terme $\frac{z^{1-k}}{1-k}$ est remplacé par lz.

en faisant $z = \tang \frac{1}{2}\theta.$

6°. Un calcul très-simple donne enfin les formules suivantes :

$$s' = v = \frac{1}{2} c (1 + z^2) z^{-1-k}, \quad x' = cz^{-k}, \quad y' = \frac{1}{2} c (1 - z^2) z^{-1-k},$$

$$x = \frac{c^2}{2g \sin i}\left(\frac{z^{1-2k}}{1-2k} - \frac{z^{-1-2k}}{1+2k}\right) + \text{const.},$$

$$y = -\frac{c^2}{4g \sin i}\left(\frac{z^{-2-2k}}{2+2k} + \frac{z^{2-2k}}{2-2k}\right) + \text{const.},$$

$$s = \frac{c^2}{4g \sin i}\left(\frac{z^{2-2k}}{2-2k} - \frac{1}{k} z^{-2k} - \frac{z^{-2-2k}}{2+2k}\right) + \text{const.},$$

qui résolvent complétement le problème (*).

XI. Une table de forme elliptique est soutenue, en trois points A, B, C de sa circonférence, par des pieds verticaux, sans pesanteur, dont les hauteurs sont égales, et dont les extrémités inférieures reposent sur un plan horizontal. Comment doit-on disposer ces trois pieds pour que la stabilité de la table soit la plus grande possible, c'est-à-dire pour que le moment minimum de stabilité soit un maximum (339, IV)?

Réponse : 1° le triangle ABC doit être circonscrit à une circonférence concentrique avec l'ellipse; 2° a et b étant les demi-axes de l'ellipse, le rayon de la circonférence égale $\frac{ab}{a+b}$.

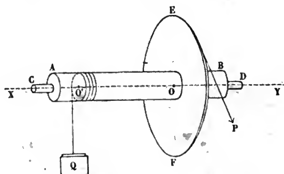
(*) Ces formules sont sujettes à quelques restrictions, analogues à celle qui a été indiquée tout à l'heure.

CHAPITRE XX.

ÉQUILIBRE ET TRAVAIL DES FORCES APPLIQUÉES AU TREUIL OU A LA POULIE.

Du treuil.

340. Le *treuil* ou *tour* est, en général, un corps solide tournant autour d'un axe fixe. Il se compose, ordinairement : 1° d'un cylindre horizontal AB (*), en bois ou en fonte, terminé par



deux petits cylindres AC, BD, appelés *tourillons,* reposant sur des *coussinets ;* 2° d'une *roue* EF, perpendiculaire à l'axe XY, et dont la circonférence porte des échelons sur lesquels montent les ouvriers, qui agissent seulement par leur poids (**). La résistance Q est appliquée à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur le cylindre.

341. Si l'on fait abstraction du frottement, et si l'on suppose la puissance P appliquée tangentiellement à la roue, il faudra, pour l'équilibre ou pour le mouvement uniforme du treuil, que *la somme des moments des forces* P, Q, *par rapport à l'axe* XY, *soit égale à*

(*) Un treuil dont l'axe est vertical prend le nom de *cabestan.*

(**) Cette disposition est adoptée dans le *treuil des carriers.*

zéro (280) (*). Cette condition unique se décompose dans les deux suivantes :

1°. *La puissance et la résistance doivent tendre à faire tourner la machine en sens contraires; 2° la puissance est à la résistance, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.* En effet, r et R étant ces deux rayons, on doit avoir

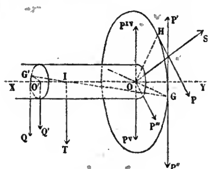
$$PR = Qr, \quad (1)$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

342. *Équation du travail.* — Si la machine tourne d'un petit angle ω autour de l'axe, les points d'application de la puissance et de la résistance décrivent des arcs semblables, représentés par $R\omega$, $r\omega$; en sorte que les *travaux élémentaires* de ces deux forces ont pour valeurs $P.R\omega$ et $Q.r\omega$. Donc, d'après l'équation (1), *le travail moteur est égal au travail résistant;* ce qui devait être (277).

343. *Pressions exercées sur l'axe.* — Ces pressions sont produites par le poids du treuil, composé avec les forces données P, Q. On peut démontrer, de la manière suivante, que *ces deux dernières forces agissent comme si elles étaient transportées, parallèlement à elles-mêmes, aux centres* O, O′ *des circonférences sur lesquelles sont situés leurs points d'application.*



Par le centre O de la roue, menons le rayon OG, parallèle au rayon *horizontal* O′G′; puis appliquons au point G deux forces verticales P′, P″, dirigées en sens contraires, et égales à la puissance P : l'état du système ne sera pas changé.

Or, les deux forces égales P, P′, appliquées en H, G, tangentiel-

(*) *Le seul mouvement possible* étant une rotation autour de XY, *les six équations de l'équilibre se réduisent à une.* On va voir que l'*équation du travail* (277) conduit au même résultat.

lement à la roue, se composent en une force S, dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par les directions de P, P' : on peut donc supposer cette résultante S appliquée au centre O de la roue, et on peut ensuite la décomposer en deux nouvelles forces P''', P^{IV}, respectivement égales et parallèles à P, P'.

D'un autre côté, si l'on mène la droite GG', qui rencontre l'axe OO' en un point I, les deux triangles rectangles GOI, G'O'I donneront

$$\frac{GO}{G'O'} = \frac{GI}{G'I} = \frac{IO}{IO'}.$$

Mais (226)

$$\frac{GO}{G'O'} = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{P''};$$

donc

$$\frac{Q}{P''} = \frac{GI}{G'I} = \frac{IO}{IO'}.$$

Ces deux égalités de rapports prouvent : 1° que la résultante T des forces parallèles P'', Q est appliquée en I; 2° que ces deux forces peuvent être remplacées par deux nouvelles forces verticales P^{v}, Q', respectivement égales aux premières, et appliquées en O, O'.

Les forces P^{IV}, P^{v}, égales et directement opposées, se détruisent; et il ne reste plus que les forces P''', Q', appliquées en O, O' et égales, respectivement, à la puissance P et à la résistance Q.

Équilibre d'un cordon (*).

344. Les *cordons* ou cordes qui entrent dans la composition de certaines machines sont regardés comme des *tiges flexibles, inextensibles et sans pesanteur.* Un cordon AB, quelle qu'en soit la



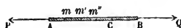
orme, doit donc être considéré comme une chaîne formée d'éléments *rectilignes* et *rigides*, A*m*, *mm'*, *m'm''*,..., mobiles autour de leurs extrémités communes.

345. *Équilibre d'un cordon rectiligne.* — De la définition pré-

(*) Les notions contenues dans ce paragraphe nous semblent nécessaires pour établir, d'une manière satisfaisante, les conditions d'équilibre de la poulie.

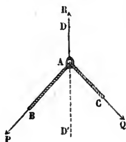
cédente, jointe au principe général de la page 220, résulte immédiatement cette proposition :

Quand un cordon rectiligne AB *est sollicité, à ses extrémités, par deux forces* P, Q *directement opposées, il faut et il suffit, pour l'équilibre, que ces deux forces soient égales.*



346. *Tension d'un cordon.* — L'action d'une force P, appliquée à l'extrémité A d'un cordon rectiligne AB, et agissant dans la direction du cordon, se transmet donc en chacun de ses points C comme si la droite AB était rigide; et, si l'on vient à enlever la partie CA du cordon, on devra, pour maintenir en équilibre la partie CB, appliquer en C, dans la direction CA, une force T égale à P. Cette force T est ce qu'on appelle la *tension* du cordon.

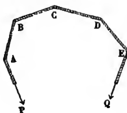
347. *Équilibre d'un cordon passant dans un anneau.* — Si le cordon BAC, auquel sont appliquées des forces P, Q, traverse un anneau mobile A sollicité par une force R, *il faut, pour l'équilibre :* 1° que le prolongement de la direction DA divise, en deux parties égales, l'angle BAC; 2° *que les deux forces* P, Q *soient égales.*



En effet, l'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe deux points B, C du cordon. L'anneau A, auquel est appliquée la force R, se mouvra donc sur un ellipsoïde de révolution dont la section méridienne a pour foyers les points B, C : pour l'équilibre, la force R doit être normale à cette surface; ce qui donne les conditions

$$BAD' = CAD', \quad P = Q.$$

348. *Remarque.* — Si l'anneau A est fixe, il faut encore, pour l'équilibre, que les forces P, Q soient égales entre elles.



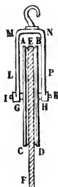
En effet, si P = Q, l'équilibre a lieu; donc il sera détruit si l'on augmente l'une des deux forces.

349. *Équilibre d'un cordon passant sur un polygone* ABC.... — En consi-

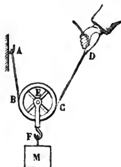
dérant successivement chacun des sommets du polygone, on trouve encore que *les forces* P, Q, *appliquées aux extrémités du cordon, doivent être égales.*

De la poulie.

350. On appelle *poulie* un cylindre ABCD, de hauteur AB très-petite, mobile autour d'un axe, et dont la surface latérale est creusée en gorge, de manière à recevoir une corde EF. Le plus souvent, l'axe solide GH, qui traverse la poulie, pénètre, au moyen de deux tourillons GI, HK, dans une *chape* ou monture LMNP; quelquefois aussi les tourillons reposent sur des *coussinets*. Enfin, l'axe GH peut faire *corps* avec la poulie, ou en être indépendant.



351. La poulie est dite *fixe* lorsque la chape est établie à demeure ou accrochée à un anneau scellé dans un mur. Dans la poulie *mobile*, l'un des deux *brins* AB de la corde est fixé en un point A: avec la main, on soulève l'autre brin CD. La chape EF, au lieu de supporter l'axe, est accrochée au fardeau M.

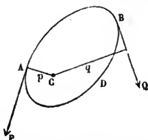


352. *Équilibre de la poulie fixe.* — On peut démontrer, très-simplement, les deux propositions suivantes: 1° *les forces* P, Q, *appliquées aux extrémités de la corde* AB, *doivent être égales*, 2° *la poulie doit être circulaire.*

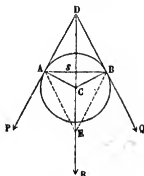
1°. Si l'équilibre a lieu, il ne sera pas troublé quand on rendra la poulie immobile, mais alors $P = Q$ (347).

2°. L'équilibre, s'il existe, ne sera pas troublé si la partie AB de la corde fait corps avec la poulie. La machine ne différant plus

d'un levier sollicité par des forces égales, les distances p, q doivent être égales entre elles. D'après les usages auxquels la poulie est destinée, cette relation doit avoir lieu quelle que soit la position de la courbe ABD; donc cette courbe est une circonférence ayant pour centre le point C.



353. *Pression exercée sur l'axe.* — Les forces égales P, Q, que l'on peut supposer représentées par les deux tangentes *égales* AD, BD, ont pour résultante une force R, dirigée suivant DC, et représentée elle-même par la diagonale DE du losange DAEB. Cette résultante est, abstraction faite du poids de la poulie, *la pression exercée sur l'axe.*



Pour évaluer R, menons les rayons AC, BC et la droite AB, *sous-tendante de l'arc embrassé par la corde :* les deux triangles isocèles DAE, ACB seront semblables; donc

$$\frac{\text{DE}}{\text{DA}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}},$$

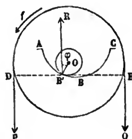
ou

$$\frac{\text{R}}{\text{P}} = \frac{s}{r}.$$

Ainsi, *la pression exercée sur l'axe est à l'une des forces égales appliquées à la poulie, comme la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde est au rayon de la poulie.*

354. *Cas où l'on a égard au frottement.* — Supposons que le tourillon OB′ fasse corps avec la poulie DE. Dans l'état de repos, le contact entre le tourillon et le coussinet ABC a lieu en B. Mais si la poulie tourne uniformément, dans le sens marqué par la flèche f, le tourillon frotte sur le coussinet, et le point de contact

vient occuper une position B′, déterminée par la condition que la *réaction* R fasse équilibre aux forces P, Q. Admettons que ces deux forces soient verticales; alors



$$R = P + Q. \quad (1)$$

Si nous représentons par r le rayon de la poulie, par ρ le rayon du tourillon, et par φ *l'angle de frottement*, égal à OB′R, nous aurons, en égalant à zéro la somme des moments par rapport au point B′,

$$P(r - \rho \sin\varphi) = Q(r + \rho \sin\varphi),$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + \rho \sin\varphi}{r - \rho \sin\varphi}. \quad (2)$$

355. *Remarques.* — I. *Quand il y a frottement entre le tourillon et le coussinet, la puissance appliquée à la poulie doit être plus grande que la résistance.*

II. *Si l'angle de frottement est nul, la puissance devient égale à la résistance.*

III. D'après l'équation (2),

$$\frac{P}{Q} - 1 = 2\frac{\frac{\rho}{r}\sin\varphi}{1 - \frac{\rho}{r}\sin\varphi}; \quad (3)$$

donc, *pour qu'une poulie soit bonne :* 1° *le frottement du tourillon sur le coussinet doit être faible* (*); 2° *le tourillon doit avoir un rayon beaucoup plus petit que celui du coussinet* (**).

356. *Valeur du frottement.* — Le frottement F est la composante *tangentielle* de la réaction R (303). Or,

$$R = Q\frac{2r}{r - \rho \sin\varphi};$$

donc

$$F = Q\frac{2r\sin\varphi}{r - \rho \sin\varphi}. \quad (4)$$

(*) Cette première condition était évidente à priori.

(**) Cependant, comme la machine doit présenter une résistance suffisante, le premier rayon ne doit pas être trop petit.

La fraction contenue dans le second membre diminue avec φ et avec le rapport $\frac{\rho}{r}$: nous retrouvons donc, d'une autre manière, les deux conditions obtenues tout à l'heure.

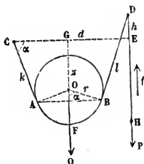
357. *Equilibre de la poulie mobile.* — On peut faire abstraction du point fixe C, si l'on suppose le cordon CA sollicité par une force T, directement opposée à CA. Cela posé, dans l'état d'équilibre de la poulie : 1° *la tension* T *doit être égale à la puissance* P; 2° la résistance Q est égale à la résultante des deux forces égales T, P.

De cette seconde condition, on déduit (353) la relation suivante :

La puissance est à la résistance, comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante s de l'arc embrassé par la corde.

358. *Remarque.* — *Quand les deux cordons* AC, BD *sont parallèles, la puissance est la moitié de la résistance.*

359. *Travail des forces dans la poulie mobile.* — Afin de vérifier si, dans l'état d'équilibre, le travail de la puissance P est, *sensiblement*, égal au travail de la résistance, nous supposerons que la corde CAFBDE, dont l'extrémité C est fixe, passe dans un anneau placé en D.



Ceci admis, menons l'horizontale CE, et posons :

$$CE = d,\quad AO = r,$$
$$DE = h,\quad AOB = 2\alpha,$$
$$CA = k,\quad GO = z,$$
$$BD = l,\quad CA + AFB + BD = L.$$

Si le centre O de la poulie descend d'une petite quantité, représentée par Δz, *le point d'application* H *de la puissance* P *s'élèvera d'une quantité égale à l'allongement* ΔL *du cordon* CAFBD. L'équation du travail est donc (277)

$$Q\Delta z - P\Delta L = 0,$$

ou, à cause de $Q = 2P\sin\alpha$,

$$2\sin\alpha\,\Delta z - \Delta L = 0. \quad (1)$$

L'inspection de la figure donne, immédiatement,

$$k + l + 2r\alpha = L, \quad (2) \qquad (k+l)\cos\alpha + 2r\sin\alpha = d, \quad (3)$$

$$z = k\sin\alpha - r\cos\alpha = l\sin\alpha - h - r\cos\alpha. \quad (4)$$

Par conséquent,

$$z = -\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}d\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{r}{\cos\alpha}, \quad (5)$$

$$L = \frac{d}{\cos\alpha} - 2r\,\mathrm{tang}\,\alpha + 2r\alpha; \quad (6)$$

puis

$$\Delta z = \left(\frac{1}{2}d\frac{1}{\cos^2\alpha} - r\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\Delta\alpha,$$

$$\Delta L = \left(\frac{d\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - 2r\,\mathrm{tang}^2\alpha\right)\Delta\alpha\,(*).$$

Ces dernières valeurs, substituées dans l'équation (1), la rendent identique; donc *le travail moteur est égal au travail résistant.*

Des moufles.

360. Une *moufle* est un système de poulies assemblées dans une même chape, et montées, soit sur des axes séparés, comme le montre la figure ci-après, soit sur un même axe. Ordinairement, on emploie en même temps une moufle *fixe ab* et une moufle *mobile cd*. Une corde, dont l'extrémité A est sollicitée par une puissance P, embrasse successivement, par la moitié, les poulies BC, DE, FG,..., MN, et vient s'attacher en P, à la partie inférieure de la chape fixe *ab*. La résistance Q est appliquée à la chape mobile.

361. *Condition d'équilibre.* — En exprimant que *la résistance* R *fait équilibre aux tensions des cordons* DC, EF, HG, IK, ML, NP,

---

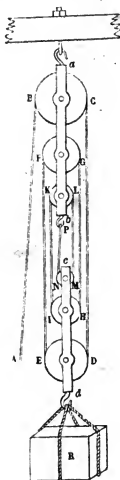
(*) D'après la théorie des dérivées, l'équation $y = f(x)$ donne

$$\Delta y = [f'(x) + \varepsilon]\,\Delta x,$$

ε ayant pour limite *zéro*. Donc, *quand on se borne aux quantités du premier ordre*, on doit supposer $\Delta y = f'(x).\Delta x$.

ou *en égalant le travail moteur au travail résistant*, on arrive à la proposition suivante :

La résistance Q *est égale à la puissance* P, *multipliée par le nombre des cordons qui soutiennent la moufle mobile.*

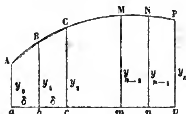


APPENDICE.

FORMULES APPROXIMATIVES DE QUADRATURE.

On a vu, à la page 194, que la détermination du travail total d'une force peut être ramenée à la recherche de l'aire d'une courbe dont on connaît un certain nombre d'ordonnées. Nous allons indiquer les formules qui permettent d'effectuer ces *quadratures approchées*.

1. *Méthode des trapèzes.* — APpa étant l'aire qu'il s'agit d'évaluer, soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les ordonnées des points A, B,..., P, ordonnées que l'on suppose *équidistantes*. Si l'intervalle δ est assez petit, on pourra, sans grande erreur, supposer que les arcs AB, BC,..., NP, sont confondus avec leurs cordes. On aura donc, à peu près, en appelant A l'aire cherchée,



$$A = \frac{1}{2}\delta(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\delta(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{1}{2}\delta(y_{n-1} + y_n):$$

ou $$A = \delta\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right);$$

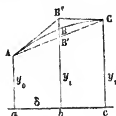
ou encore, en représentant par S la somme de toutes les ordonnées,

$$A = \delta\left(S - \frac{y_0 + y_n}{2}\right). \quad (1)$$

Ainsi, *l'aire* A *a pour valeur approchée le produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives, par la somme de toutes les ordonnées, diminuée de la demi-somme des ordonnées extrêmes.*

2. *Méthode de Thomas Simpson.* — Au lieu de remplacer les arcs AB, BC,... par leurs cordes, comme dans la méthode précédente, le géomètre anglais Thomas Simpson substitue, à la courbe ABC... MNP, des paraboles du second degré, passant

par les extrémités de trois ordonnées consécutives, et dont les axes sont parallèles à ces ordonnées. Ce procédé exige évidemment que le nombre n des divisions de la base ab soit *pair*.



Considérons, pour fixer les idées, l'arc de parabole passant par les extrémités A, B, C des trois premières ordonnées. Menons la corde AB'C. Prenons BB'' = BB', et menons B''A, B''C : ces deux droites seront tangentes à la parabole (*D. D.*, 341). D'un autre côté, le *segment parabolique* ABCB' *est les deux tiers du triangle* AB''C (*D. D.*, 345). Par conséquent,

$$\text{ABC}ca = (y_0 + y_2)\,\delta + \frac{2}{3}\text{B}'\text{B}''.\delta$$

$$= \left[(y_0 + y_2) + \frac{4}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right]\delta;$$

ou

$$\text{ABC}ca = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1).$$

En appelant encore A l'aire cherchée, nous aurons donc

$$\text{A} = \frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1 + y_2 + y_4 + 4y_3 + \ldots + y_{n-2} + y_n + 4y_{n-1}),$$

ou, en désignant par S_p la somme des ordonnées à *indice pair*, et par S_i la somme des ordonnées à *indice impair*,

$$\text{A} = \frac{1}{3}\delta[2S_p + 4S_i - (y_0 + y_n)]. \quad (2)$$

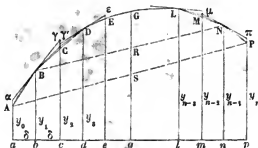
L'aire A *a pour valeur approchée le tiers du produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives, par deux fois la somme des ordonnées à indice pair, plus quatre fois la somme des ordonnées à indice impair, moins la somme des ordonnées extrêmes* (*).

3. *Remarque.* — La formule de Simpson, appliquée à la para-

(*) Par des considérations particulières, M. *Saigey* est arrivé à une règle qui rentre dans celle de Simpson. (*Géométrie élémentaire*, par MM. Vincent et Saigey, page 243.)

bole du troisième degré (*), donne un résultat *exact*, même quand le nombre des valeurs de l'ordonnée se réduit à *trois* (**).

4. *Méthode de M. Poncelet.* — En supposant encore la base *ab* partagée en un nombre *pair* de parties égales, on mène les cordes AB, BD,..., LN, NP, puis les tangentes aux sommets B, D,..., L, N; et l'on prolonge chacune de ces dernières droites jusqu'aux ordonnées voisines du sommet correspondant. On obtient ainsi un polygone ABD,..., LNP *inscrit* à la courbe, et un autre polygone $\alpha\alpha\gamma\gamma'\varepsilon,\ldots,\mu\pi p$, qu'on peut regarder comme y étant *circonscrit* (***).



Cela posé, en appelant A' et A'' les aires de ces deux polygones, on a, par un calcul analogue à ceux qui précèdent,

$$A' = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{2} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{2}\right), \quad A'' = 2\delta S_i.$$

L'aire cherchée A, étant comprise entre A' et A'', doit différer assez peu de la moyenne entre ces deux quantités; donc

$$A = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{4} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{4}\right). \quad (3)$$

Telle est la formule de *M. Poncelet.*

(*) Représentée par

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVI, p. 312.

(***) On suppose, pour plus de simplicité, que la courbe donnée n'a aucun point d'inflexion, et qu'elle tourne sa concavité vers la base *ab*. Tous les autres cas peuvent être ramenés à celui-là.

5. *Remarque.* — En vertu des hypothèses précédentes, la *limite de l'erreur* ε, à laquelle donne lieu l'application de cette formule, est $A'' - A'$; donc

$$\varepsilon < \delta\left(\frac{y_0 + y_n}{2} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{2}\right).$$

Soit gG l'ordonnée passant par le milieu de ab; alors, en menant les cordes AP, BN, on a

$$gS = \frac{1}{2}(y_0 + y_n), \quad gR = \frac{1}{2}(y_1 + y_{n-1});$$

donc $$\varepsilon < \delta . RS.$$

6. *Méthode de M. Piobert.* — En discutant les principales formules de quadrature, et en particulier celle de M. Poncelet, *M. Parmentier,* capitaine du Génie, a été conduit, par une méthode que nous ne pouvons reproduire ici, à cette conclusion remarquable : *la différence* $A'' - A$ *est, à fort peu près, la moitié de la différence* $A - A'$. Par conséquent,

$$A = \frac{A' + 2A''}{3},$$

ou $$A = \delta\left(2S_i + \frac{y_0 + y_n}{6} - \frac{y_1 + y_{n-1}}{6}\right). \quad (4)$$

Cette nouvelle formule, à laquelle M. Piobert était arrivé de son côté, n'est pas plus compliquée que celle de M. Poncelet; et, comme elle est beaucoup plus approchée, elle doit toujours lui être préférée (*).

7. *Autre méthode.* — En modifiant la méthode de Simpson, on arrive aisément (**) à la formule suivante :

$$A = \delta\left[S - \frac{5}{8}(y_0 + y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\right].$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome XIV, page 381.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome X, page 412.

FIN DU SECOND VOLUME.



